Ableitung und Steigung

Aufgabe 1

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ über den Differentialquotienten.

Lösung:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^{\,2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0^{\,2}+2hx_0+h^2-x_0^{\,2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Somit ist $f'(x) = 2x$.

Aufgabe 2

Bilde die Ableitungen.

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 10$
c) $f(x) = x + 10$
d) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$
e) $f(x) = \dfrac{4}{x^3} = 4x^{-3}$

Lösung:

a) $f'(x) = 3x^2$
b) $f'(x) = 3\cdot 2x^2 - 4\cdot 2x + 5 = 6x^2 - 8x + 5$
c) $f'(x) = 1$
d) $f'(x) = 1/2\cdot x^{1/2 - 1} = 1/2\cdot x^{-1/2} = \dfrac{1}{2x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
e) $f'(x) = -12x^{-4} = -\dfrac{12}{x^4}$

Aufgabe 3

Wie ist der Neigungswinkel der Tangente an die Kurve von $f(x) = x^2 - 3x$ an der Stelle $x = 2$?

Lösung:

$f'(x) = 2x - 3$
$f'(2) = 1 = \tan(\alpha) \quad | \tan^{-1}$
$\alpha = 45°$

Tangenten und Normalen

Aufgabe 4

Gesucht ist die Gleichung der Tangenten an die Kurve der Funktion $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle $x = 1$.

Lösung:

Es gilt:

$$f'(x) = 2x$$

$$m = f'(1) = 2$$

Damit ist $t(x) = 2x + b$. Nun muss man noch b bestimmen.
Weil $f(1) = 4$ ist, muss auch

$$t(1) = 2 + b = 4$$

sein. Damit ist $b = 2$ und $t(x) = 2x + 2.$

2. Lösungsmöglichkeit: Die Gleichung einer Tangenten an der Stelle $x = x_0$ ist durch $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ gegeben. In Aufgabe 4 ist $x_0 = 1$:

$$t(x) = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 4 = 2x + 2$$

Aufgabe 5

Gesucht ist die Gleichung der Normalen an die Kurve der Funktion $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle $x = 1$ (siehe Aufgabe 4).

Lösung:

In Aufgabe 4 war $m_t = f'(1) = 2$. Damit ist $2 \cdot m_n = -1$ und $m_n = -1/2$.

Somit ist die Normalengleichung bis auf den y-Achsenabschnitt bekannt:

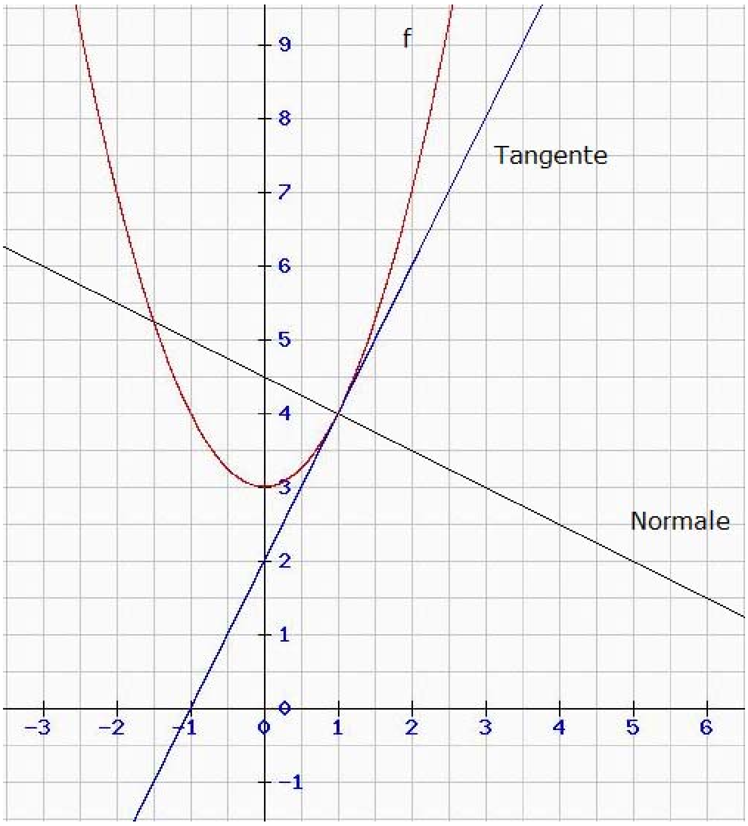
$$n(x) = -1/2 \cdot x + c$$

Nun kann man c wie bei der Tangentengleichung bestimmen, denn da $f(1) = 4$ ist, gilt auch

$$n(1) = -1/2 + c = 4$$

sein. Damit ist $c = 9/2$ und $n(x) = -1/2 \cdot x + 9/2.$

2. Lösungsmöglichkeit: Die Gleichung einer Normalen an der Stelle $x = x_0$ ist durch $n(x) = -1/f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ gegeben, wenn $f'(x_0) \neq 0$ (bei $f'(x_0) = 0$ ist $x = x_0$ Normalengleichung).



Aufgabe 6 (Tangenten von einem Punkt aus an den Graph von f legen)

Vom Punkt Q(-1; -1) aus sollen Tangenten an den Graph von $f(x) = x^2 + 2$ gelegt werden. Wie lauten die Berührpunkte und wie die Tangentengleichungen?

Lösung:

Bei dieser Aufgabe ist zu beachten, dass hier Q nicht auf dem Graph von f liegt (siehe die Grafiken unten), wie bei Aufgabe 4. Wäre die Tangente im Punkt P(a; f(a)) des Graphen von f zu bestimmen, müsste man nur in die Gleichung (1) einsetzten. Nur hier ist der Berührpunkt (bzw. sind die Berührpunkte) unbekannt.

Tangentengleichung für die Tangente im Punkt P(a; f(a)) auf dem Graph von f ist:

$$(1) \qquad t(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Hier ist nun aber a unbekannt. Wir haben lediglich einen Punkt Q(-1; -1) gegeben, durch den die Tangente geht.

Wir bestimmen nun die Ableitung $f'(x) = 2x$ und setzen $f'(a)$ und $f(a)$ in (1) ein:

$$t(x) = 2a(x - a) + a^2 + 2$$

Die Tangente soll durch Q gehen, womit

$$t(-1) = 2a(-1 - a) + a^2 + 2 = -1$$

gelten muss. Diese Gleichung können wir nach a auflösen:

$$2a(-1 - a) + a^2 + 2 = -1$$

$$-2a - 2a^2 + a^2 + 2 = -1$$

$$-a^2 - 2a + 2 = -1 \quad | +1$$

$$-a^2 - 2a + 3 = 0 \quad | \cdot(-1)$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

Die p-q-Formel liefert:

$$a_1 = 1 \text{ und } a_2 = -3$$

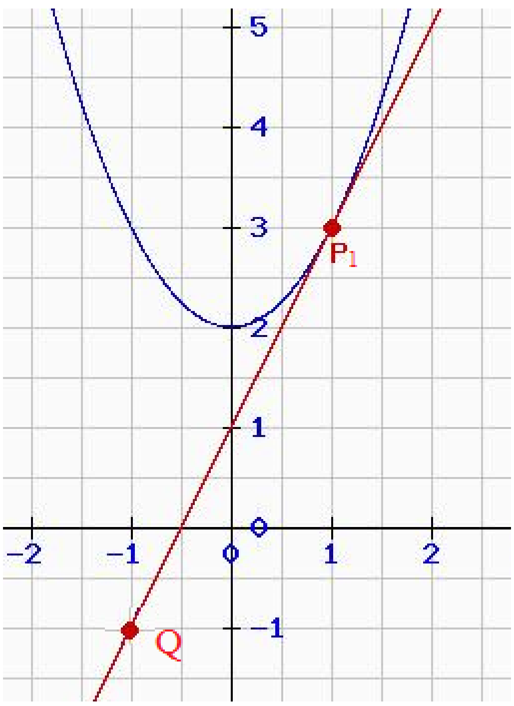
Somit haben wir die Berührstellen gefunden.

Nun bestimmen wir die y-Komponenten der Berührpunkte:
$f(1) = 3$, womit der erste Berührpunkt $P_1(1; 3)$ ist.
$f(-3) = 11$, womit der zweite Berührpunkt $P_2(-3; 11)$ ist.

Die Tangentengleichung im Berührpunkt P_1 laute (a = 1 in Gleichung (1) einsetzen):

$$t_1(x) = 2(x - 1) + 1^2 + 2$$

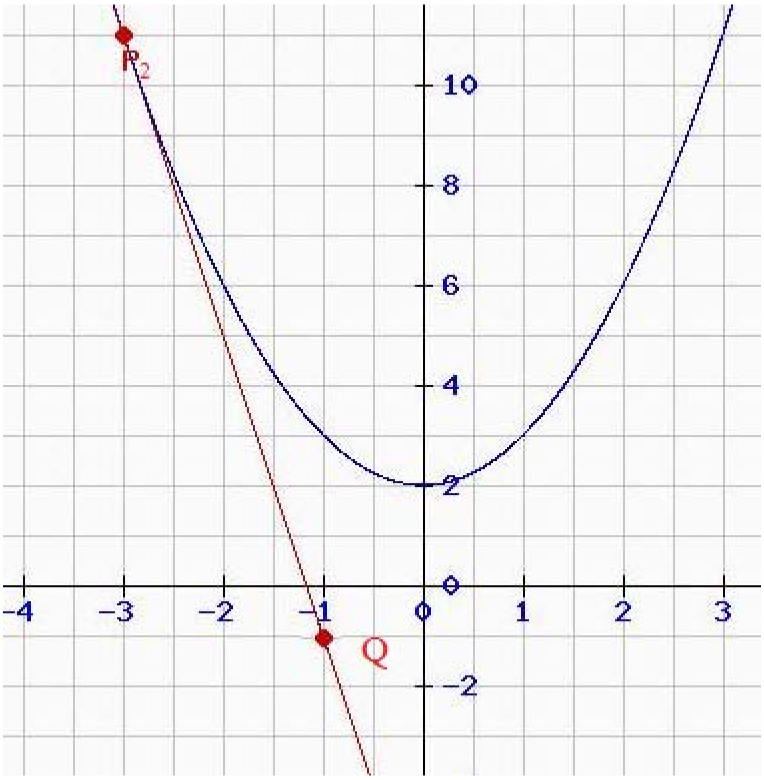
$$t_1(x) = 2x + 1$$



Die Tangentengleichung im Berührpunkt P_2 laute (a = -3 in Gleichung (1) einsetzen):

$$t_2(x) = -6\,(x + 3) + (-3)^2 + 2$$

$$t_2(x) = -6x - 7$$



Aufgabe 7

Bestimme die Normale von $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle x = 0.

Lösung:

Tangente wäre $t(x) = f(0) = 3$, da die Steigung der Tangenten an der Stelle x = 0 gleich Null ist ($m = f\,`(0) = 2\cdot 0 = 0$). Die Normale an die Kurve von $f(x) = x^2 + 3$ an der Stelle x = 0 wäre die Gerade $x = 0$ (ist keine Funktion, da diese senkrecht verläuft).

Regeln zur Differentialrechnung

Aufgabe 8

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ mit Hilfe der Produktregel.

Lösung:

$$u(x) = x^2 \;\Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = \sin(x) \;\Rightarrow v'(x) = \cos(x)$$

Also gilt: $$f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

Aufgabe 9

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+2}$ mit Hilfe der Quotientenregel.

Lösung:

$$u(x) = 4x - 2 \;\Rightarrow u'(x) = 4$$

$$v(x) = x + 2 \;\Rightarrow v'(x) = 1$$

Somit gilt: $$f'(x) = \frac{4(x+2)-(4x-2)}{(x+2)^2} = \frac{10}{(x+2)^2}$$

Hier ist zu beachten, dass man das Binom im Nenner nicht ausmultipliziert, denn ab der zweiten Ableitung kann man den Nenner mit der Kettenregel ableiten und man kann dann sogar kürzen, was man nach dem Ausmultiplizieren nicht direkt sehen könnte.

Aufgabe 10

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = (4x-3)^5$ mit der Kettenregel.

Lösung:

$$u(v) = v^5 \;\Rightarrow \frac{du(v)}{dv} = 5v^4$$

$\dfrac{du(v)}{dv}$ ist die Ableitung von u nach v, die auch äußere Ableitung genannt wird. $v'(x)$ wird die innere Ableitung genannt.

$$v(x) = 4x - 3 \;\Rightarrow v'(x) = 4$$

Also ist $f'(x) = 5v^4 \cdot 4 = 20(4x-3)^4$.

Aufgabe 11

Leite $f(x) = 1/(x-4)^3$ mit der Kettenregel ab.

Lösung:

$$f(x) = (x-4)^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3(x-4)^{-4} = -3/(x-4)^4$$

Aufgabe 12

Bilde die erste Ableitung.

a) $f(x) = \dfrac{2x-5}{(3x-4)^2}$

Lösung:

Hier muss zunächst die Quotientenregel angewendet werden:

$$u(x) = 2x - 5 \Rightarrow u'(x) = 2$$

Für die Ableitung von V wird die Kettenregel benötigt:

$$v(x) = (3x-4)^2 \Rightarrow v'(x) = 2(3x-4)3 = 6(3x-4)$$

was wir nicht ausmultiplizieren, denn bei

$$f'(x) = \frac{2(3x-4)^2 - (2x-5)6(3x-4)}{(3x-4)^4} = \frac{(3x-4)[2(3x-4)-6(2x-5)]}{(3x-4)^4} = \frac{2(3x-4)-6(2x-5)}{(3x-4)^3}$$

konnte im letzten Schritt der Faktor $(3x-4)$ gekürzt werden. Damit gilt:

$$f'(x) = \frac{-6x+22}{(3x-4)^3}$$

b) $f(x) = (2x-4)e^{-x}$

Lösung:

Hier muss zunächst die Produktenregel angewendet werden:

$$u(x) = 2x - 4 \;\Rightarrow u'(x) = 2$$

Für die Ableitung von v wird die Kettenregel benötigt:

$$v(x) = e^{-x} \;\Rightarrow v'(x) = -e^{-x}$$

(hier ist die innere Ableitung -1, die äußere Ableitung ist e^{-x})

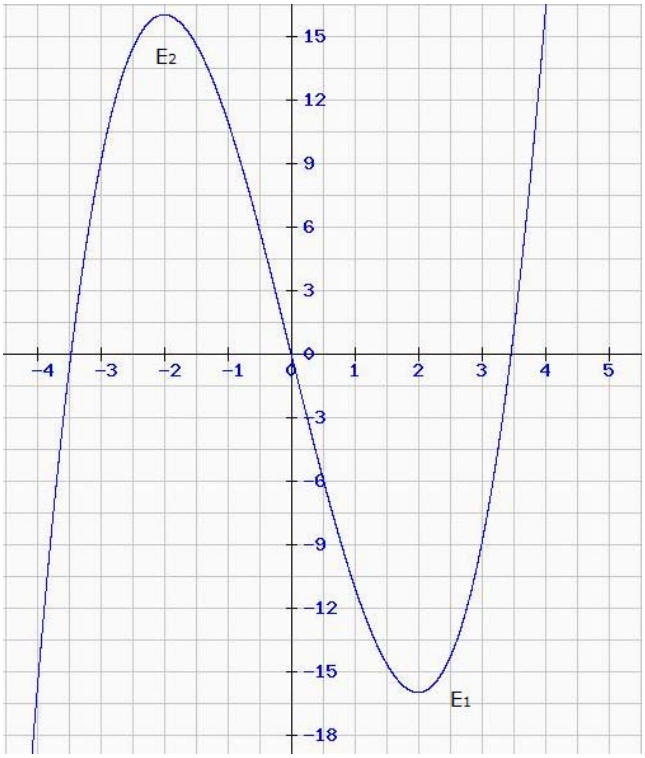
Also ist $$f'(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x-4) = [2-(2x-4)]e^{-x} = (-2x+6)e^{-x}$$

Das ausklammern im letzten Schritt ist auch wichtig. Erstens werden dadurch weitere Ableitungen einfacher zu berechnen und zweitens kann man damit einfach Nullstellen von f′ ablesen, die man zur Bestimmung von Extremwerten benötigt.

Extremwerte

Aufgabe 13

Gesucht sind die Extrema der Funktion $f(x) = x^3 - 12x$.



Lösung:

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f''(x) = 6x$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0 \mid + 12$

$3x^2 = \quad 12 \mid :3$

Also ist $x^2 = 4$ und somit $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

Nun setzen wir die beiden Werte in die zweite Ableitung ein und prüfen, um was es sich handelt:

$f''(2) = 12 > 0$, somit liegt hier ein TP vor.

$f''(-2) = -12 < 0$, somit liegt hier ein HP vor.

Nun bestimmen wir noch die Funktionswerte:

$y_1 = f(2) = 8 - 24 = -16$, also ist $E_1(2; -16)$ ein HP.

$y_2 = f(-2) = -8 + 24 = 16$, also ist $E_2(2; 16)$ ein TP.

Wendepunkte

Aufgabe 14

Gesucht sind der Wendepunkt der Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2$.

Lösung:

Ableitungen:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$
$$f''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x) = 0$$
$$6x - 12 = 0 \mid +12$$
$$6x = 12$$

Also ist $x_1 = 2$. Nun setzen wir x_1 in die dritte Ableitung ein:

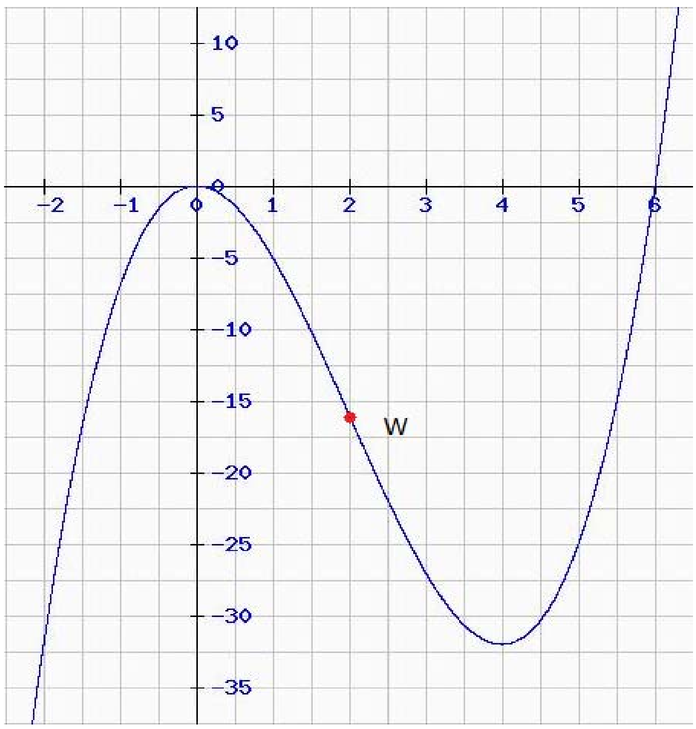
$$f'''(2) = 6 \neq 0$$

somit liegt hier ein WP vor.

Nun bestimmen wir noch den Funktionswert:

$$y_1 = f(2) = 8 - 24 = -16$$

also ist W(2; -16) ein WP.



Symmetrie-Eigenschaften von Funktionen und Kurvendiskussion

Aufgabe 15

Untersuche die Funktion auf Punktsymmetrie zum Ursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse.

a) $f(x) = x^3 - 4x$
b) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

Lösung:

a) Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn es kommen nur ungerade Exponenten vor:

$$-f(-x) = -((-x)^3 - 4(-x)) = -(-x^3 + 4x) = x^3 - 4x = f(x)$$

b) Der Graf von $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn es kommen nur gerade Exponenten vor:

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = x^4 + 3x^2 + 1 = f(x)$$

Aufgabe 16

Untersuche die Funktion auf Punktsymmetrie zum Ursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse.

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
b) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

Bemerkung zur Lösung:
Setzt sich die Funktion aus dem Produkt oder dem Quotient von Funktionen u und v zusammen, so liegt eine unserer gesuchten Symmetrien vor, wenn beide Funktionen eine solche Symmetrie aufweisen. Man kann zeigen, dass der Graf von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ (dies gilt auch für den von $f(x) = u(x)/v(x)$) achsensymmetrisch zur y-Achse ist, wenn entweder die beiden Grafen der Funktionen u und v achsensymmetrisch zur y-Achse oder wenn beide Grafen punktsymmetrisch zum Ursprung sind. Analog liegt eine Punktsymmetrie zum Ursprung vor, wenn der Graf von u punktsymmetrisch zum Ursprung und der von v achsensymmetrisch zur y-Achse ist, oder vice versa.

Gilt z.B. $u(-x) = u(x)$ und $v(-x) = v(x)$, dann folgt

$$f(-x) = u(-x) \cdot v(-x) = u(x) \cdot v(x) = f(x).$$

Somit ist, wenn u und v achsensymmetrisch zur y-Achse ist, auch f achsensymmetrisch zur y-Achse. Gilt aber z.B. $u(-x) = u(x)$ und $v(-x) = -v(x)$, dann folgt

$$f(-x) = u(-x) \cdot v(-x) = u(x) \cdot (-v(x)) = -u(x) \cdot v(x) = -f(x).$$

Somit ist, wenn u achsensymmetrisch zur y-Achse und v punktsymmetrisch zum Ursprung ist, auch f punktsymmetrisch zum Ursprung. U.s.w..

Nun zur Lösung:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn $u(x) = x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung und $v(x) = x^2 + 1$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Oder direkt gezeigt:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$$

b) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, denn $u(x) = x$ und $v(x) = \sin(x)$ sind punksymmetrisch zum Ursprung.

Oder direkt gezeigt:
$f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$, da $\sin(-x) = -\sin(x)$ gilt.

Übrigens ist die Kosinus-Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse: $\cos(-x) = \cos(x)$

Bemerkung: Wir sagen im Folgenden - wie wir es oben getan haben - immer kurz "die Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse", wenn $f(-x) = f(x)$ gilt. Analog sagen wir im Folgenden - wie oben - immer kurz "die Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung", wenn $f(-x) = - f(x)$ gilt. Diese Symmetrie-Eigenschaften gelten natürlich anschaulich für den Grafen der Funktion f, d.h. der Graf von f ist dann achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung.

Aufgabe 17

Führe eine Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ durch.

Lösung:

I) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Mit der y-Achse: $f(0) = 0$, also $S_y(0;0)$ ist Schnittpunkt mit y-Achse.

Mit der x-Achse: Hier müssen wir die Nullstellen bestimmen:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

Somit haben wir eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ und eine einfache Nullstelle bei $x = 3$:
Die Nullstellen lauten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 3$.

Bei einer doppelten Nullstelle liegt eine Extremstelle vor (ebenso wie bei einer 4-fachen, 6-fachen, …, während bei einer 3-fachen, 5-fachen, …, Nullstelle ein Sattelpunkt an dieser Stelle auf der x-Achse vorhanden ist).

II) Symmetrie

Die Funktion ist weder symmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung („es kommen gerade und ungerade Exponenten vor“).

Nachweis:
$f(-x) = (-x)^3 – 3(-x)^2 = -x^3 – 3x^2$ ist weder gleich f(x) noch –f(x).

III) Grenzwertverhalten

Der Grad n = 3 ist ungerade und $a_3 = 1 > 0$ (siehe http://mathe-total.de/Analysis-Skript/Symmetrie-und-Grenzwertverhalten.pdf ab S. 2), somit ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

IV) Extrema

Wir bestimmen zunächst drei Ableitungen (die dritte Ableitung wir auf jeden Fall noch beim Punkt V benötigt):
$f'(x) = 3x^2 - 6x$
$f''(x) = 6x - 6$
$f'''(x) = 6$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null (notwendige Bedingung):

$$f'(x) = 3x^2 – 6x = 0 \mid : 3$$

$$x^2 – 2x = 0$$

$$x(x – 2) = 0$$

Somit haben wir zwei Stellen mit waagrechter Tangente gefunden: $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Der Einfachheit halber wurden die Extremstellen analog zu den Nullstellen mit x_1 und x_2 bezeichnet. Dies sind nur die Bezeichnung innerhalb es Punktes IV, ansonsten müsste man diese z.B. mit x_{E1} und x_{E2} bezeichnen, oder die Nummerierung fortführen.

Diese setzen wir in die zweite Ableitung ein:

$f''(x_1) = f''(0) = -6 < 0$, somit ist $E_1(x_1;f(x_1))$ ein HP.
$f''(x_2) = f''(2) = 6 > 0$, somit ist $E_2(x_2;f(x_2))$ ein TP.

Wir bestimmen noch die Funktionswerte durch Einsetzen von x_1 und x_2 in die Funktion f und erhalten: $E_1(0; 0)$ und $E_2(2; -4)$.

V) Wendepunkte

Wir setzen die zweite Ableitung gleich Null (notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 6x – 6 = 0 \mid +6$$

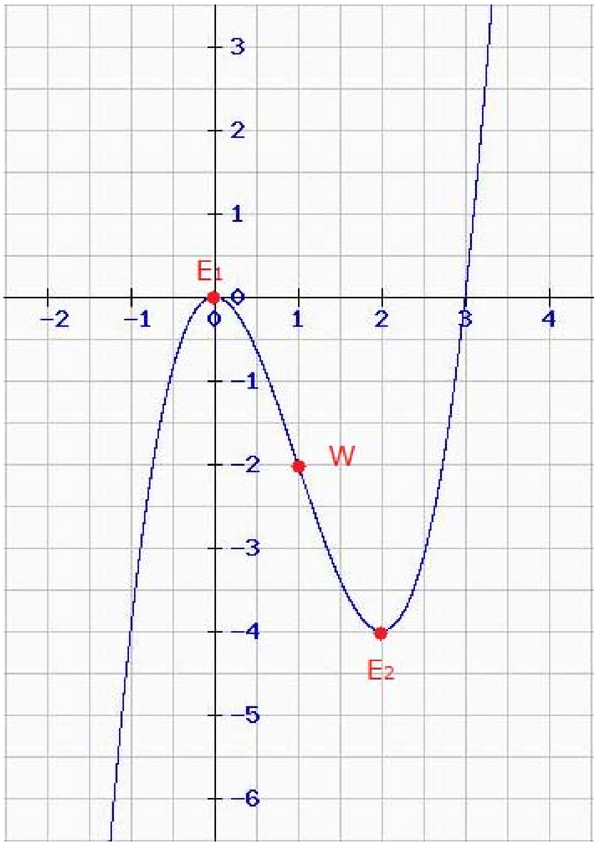
$$6x = 6 \mid :6$$

$$x = 1$$

Also ist $x_1 = 1$. Nun setzen wir x_1 in die dritte Ableitung ein:
$f'''(1) = 6 \neq 0$, somit liegt hier ein WP vor.

Nun bestimmen wir noch den Funktionswert:
$y_1 = f(1) = 1 - 3 = -2$, somit ist $W(1; -2)$ ein WP.

VI) Funktionsgraph zeichnen



Aufgabe 18

Es soll eine Kurvendiskussion für die Funktion $f(x) = (2x + 2)e^{-x}$ durchgeführt werden (dieser Typ von Funktion wird oft erst in der 12. Klasse behandelt).

Lösung:

I) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Mit der y-Achse: $f(0) = 2$, also $S_y(0;2)$ ist Schnittpunkt mit y-Achse.
Mit der x-Achse: Hier müssen wir wieder die Nullstellen bestimmen. Da ein Produkt Null ist, wenn ein Faktor Null ist, suchen wir nur die Lösung der Gleichung

$$2x + 2 = 0\ ,$$

da $e^{-x} = 0$ keine Lösung hat. Damit ist $x = -1$ eine Nullstellen.

II) Symmetrie

Ein Produkt aus zwei Funktionen weist nur dann eine Symmetrie auf, wenn die beiden Faktoren Symmetrien aufweisen. Weder der Graf von $u(x) = -2x + 2$ noch $v(x) = e^{-x}$ haben einen zur y-Achse symmetrischen Graf und auch keinen zum Ursprung punktsymmetrischen.

Nachweis:
$f(-x) = (-2x + 2)e^{x}$ ist weder gleich f(x) noch -f(x).

III) Grenzwertverhalten

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, denn für $x \to \infty$ geht e^{-x} gegen Null und somit würde auch $x^n \cdot e^{-x}$ gegen Null gehen, da eine Exponentialfunktion „stärker als jede Potenzfunktion wächst".

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, denn e^{-x} geht für $x \to -\infty$ gegen ∞ und $2x + 2$ geht gegen $-\infty$, womit das Produkt gegen $-\infty$ geht.

IV) Extrema

Wir bestimmen zunächst drei Ableitungen (die dritte Ableitung wird auf jeden Fall noch beim Punkt V benötigt):
Für die Ableitungen wird die Produktregel (und für v´ die Kettenregel) benötigt:
$u(x) = 2x + 2 \Rightarrow u'(x) = 2$
$v(x) = e^{-x} \Rightarrow v'(x) = -e^{-x}$
$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = 2e^{-x} - e^{-x}(2x + 2) = (2 - (2x + 2))e^{-x} = -2xe^{-x}$
Analog werden die nächsten Ableitungen bestimmt.
$f''(x) = (2x - 2)e^{-x}$
$f'''(x) = (-2x + 4)e^{-x}$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null (notwendige Bedingung):

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0$$

Somit haben wir eine Stelle mit waagrechter Tangente gefunden: $x_1 = 0$.

Diese setzen wir in die zweite Ableitung ein:

$$f''(x_1) = f''(0) = -2 < 0,\text{ somit ist } E(x_1;f(x_1)) \text{ ein HP.}$$

Da $f(0) = 2$ ist, ist $E(0; 2)$ der HP.

V) Wendepunkte

Wir setzen die zweite Ableitung gleich Null (notwendige Bedingung):

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0$$

Also ist $x_1 = 1$. Nun setzen wir x_1 in die dritte Ableitung ein:
$f'''(1) = 2e^{-1} \neq 0$, somit liegt hier ein WP vor.

Nun bestimmen wir noch den Funktionswert:
$y_1 = f(1) = 4e^{-1} \approx 1{,}4715$, also $W(1; 4e^{-1})$ ist ein WP.

VI) Funktionsgraf zeichnen