Rekonstruktion von Funktionen

Aufgabe 1

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades. Der Graf ist zur y-Achse symmetrisch, hat im Punkt E(2; 25) einen Hochpunkt und schneidet an der Stelle $x = 3$ die x-Achse.

Lösung:

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat folgende Gestalt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Da der Graf zur y-Achse symmetrisch ist, fallen alle Potenzen mit ungeradem Exponenten weg (d.h. $b = d = 0$):

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Somit benötigen wir drei Angaben um die Koeffizienten a, c und e bestimmen zu können:

E(2; 25) ist Extrempunkt, also gilt

(1) $f(2) = 25$, da der Graf durch den Punkt E(2; 25) geht.
(2) $f´(2) = 0$, da an einer Extremstelle die erste Ableitung verschwindet.

Da die Funktion bei $x = 3$ eine Nullstelle besitzt gilt:

(3) $f(3) = 0$

Wir benötigen die erste Ableitung: $f´(x) = 4ax^3 + 2cx$

Somit haben wir die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1)\ 2^4a + 2^2c + e = 25 \Leftrightarrow & 16a + 4c + e = 25 \\ (2)\ 4 \cdot 2^3a + 2 \cdot 2c = 0 \Leftrightarrow & 32a + 4c = 0 \\ (3)\ 3^4a + 3^2c + e = 0 \Leftrightarrow & 81a + 9c + e = 0 \end{array}$$

Da bei (2) bereits e fehlt, kann man noch die beiden Gleichungen (1) und (3) subtrahieren und erhält dann eine weitere Gleichung (4) nur mit den Unbekannten a und c:

$$\begin{array}{lll} (2) & 32a + 4c = 0 & |:4 \\ (4) & -65a - 5c = 25 & |:5 \end{array}$$

Man hätte nun die Gleichung (2) mit 5 und die Gleichung (4) mit 4 multiplizieren können um c zu eliminieren, wir dividieren allerdings die Gleichung (2) durch 4 und die Gleichung (4) durch 5:

$$\begin{array}{ll} (5) & 8a + c = 0 \\ (6) & -13a - c = 5 \end{array}$$

Addition der beiden Gleichungen (5) und (6) liefert uns -5a = 5, womit a = -1 ist. Setzt man a = -1 in (5) ein, erhält man c = 8. Setzt man a = -1 und c = 8 beispielsweise in (1) ein, so ergibt sich

$$-16 + 32 + e = 25$$

womit e = 9 ist.

Somit ist $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$ die gesuchte Funktion.

Aufgabe 2

Gesucht sind die Bedingungen bezüglich der Funktion f für:

a) W(2; 4) ist Wendepunkt.
b) x = 4 ist Extremstelle.
c) x = 3 ist Wendestelle und die Steigung der Wendetangente ist –2.
d) Der Graf berührt bei x = 5 die x-Achse.
e) Die Tangentensteigung im Punkt P(2; 4) ist 3.
f) Die Normalensteigung an der Stelle x = 3 ist m.
g) Die Tangente im Origo (Ursprung) an den Graf von f hat einen Neigungswinkel von 45°.

Lösung:

a) $f(2) = 4$, $f''(2) = 0$
b) $f'(4) = 0$
c) $f''(3) = 0$, $f'(3) = -2$
d) $f(5) = 0$, $f'(5) = 0$
e) $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$
f) $f(3) = -1/m$
g) $f(0) = 0$, $f'(0) = \tan(45°) = 1$