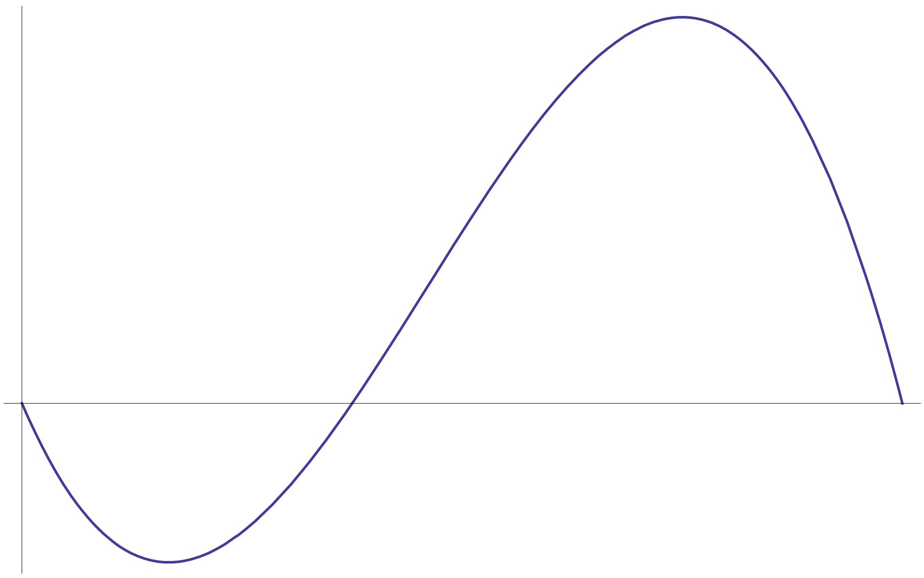
Anwendungsaufgabe zur Kurvendiskussion mit Polynomen

1) Die Gleichung $f(x) = -1/4 \cdot x^3 + 11/4 \cdot x^2 - 6x$ beschreibt einen Damm und links davon einen Graben. Die Einheit von x und f(x) ist jeweils in Metern gegeben.

a) Wie breit ist der Damm und wie breit der Graben?
b) Wie hoch ist der Damm und wie tief der Graben?
c) Wie groß ist die maximale Steigung auf der linke Seite des Damms (siehe Grafik unten) und wie groß ist an dieser Stelle die Neigung in Grad?

Querschnitt Graben mit Damm:



Lösung:

a) Hier müssen die Nullstellen von f berechnet werden und danach müssen die Abstände der Nullstellen voneinander berechnet werden:

$f(x) = -1/4 \cdot x^3 + 11/4 \cdot x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (-1/4 \cdot x^2 + 11/4 \cdot x - 6) = 0$

Damit ist $x_1 = 0$ und die restlichen Nullstellen erhalten wir über:

$-1/4 \cdot x^2 + 11/4 \cdot x - 6 = 0 \quad | \cdot(-4)$

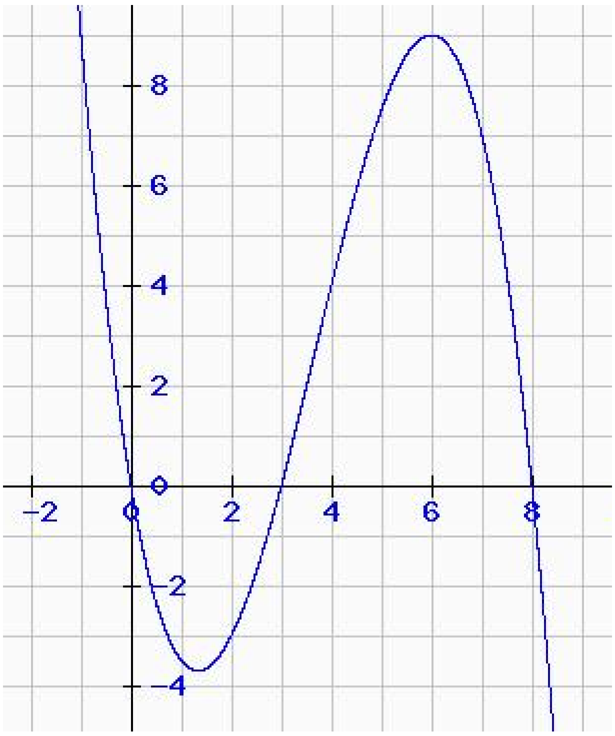
$x^2 - 11x + 24 = 0$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$x_{2/3} = 11/2 \pm \sqrt{\frac{121}{4} - 24}$

$x_{2/3} = 11/2 \pm 5/2$

$x_2 = 8$ und $x_3 = 3$



Wenn der Graben links liegt, ist der Graben 3m – 0m = 3m breit und der Damm 8m – 3m = 5m.

b) Wie hoch ist der Damm und wie tief der Graben?
Hier müssen wir den Tiefpunkt und den Hochpunkt von f bestimmen:

$f'(x) = -3/4 \cdot x^2 + 11/2 \cdot x - 6$

$f''(x) = -3/2 \cdot x + 11/2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3/4 \cdot x^2 + 11/2 \cdot x - 6 = 0 \quad | \cdot(-4/3)$

$x^2 - 22/3 \cdot x + 8 = 0$

Mit der p-q-Formel ergibt sich:

$x_{1/2} = 11/3 \pm \sqrt{\frac{121}{9} - 8}$

$x_1 = 6$ und $x_3 = 4/3$

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(6) = -7/2 < 0$, also Hochpunkt (HP).

$f''(4/3) = 7/2 > 0$, also Tiefpunkt (TP).

In $f(x)$ einsetzen: $f(6) = 9$, damit ist $H(6; 9)$ der HP und der Damm ist 9 m hoch.
$f(4/3) = -100/27$, damit ist $T(4/3; -100/27)$ der TP und der Graben ist 100/27 m ($\approx$ 3,7 m) tief.

c) Zur maximalen Steigung des Dammes auf der linken Seite:

Im Wendepunkt ist die Steigung lokal minimal oder – wie hier – maximal. Bei Anwendungsaufgaben müssen aber oft auch die Steigungen an den Rändern der Funktion beachtet werden. Hier ist es aber so, dass die Seite des Dammes, die wir betrachten, zwischen dem TP und dem HP liegt, womit die Steigung auf dieser Seite im WP maximal ist.

$f''(x) = -3/2 \cdot x + 11/2$
$f'''(x) = -3/2$

$f''(x) = -3/2 \cdot x + 11/2 = 0 \quad | -11/2$

$-3/2 \cdot x = -11/2 \quad | \cdot(-2/3)$

$x = 11/3$

Die ist ein Wendepunkt, denn $f'''(11/3) = -3/2 \neq 0$.

Jetzt müssen wir die Steigung m im Wendepunkt berechnen:

$m = f'(11/3) = -3/4 \cdot (11/3)^2 + 11/2 \cdot (11/3) - 6 = 49/12$

Es gilt $m = \tan(\alpha)$ bzw. $\alpha = \tan^{-1}(m) = \tan^{-1}(49/12) \approx 76{,}24°$

Diese Neigung herrscht tatsächlich am Damm vor und nicht am Graben, denn $f(11/3) = 143/54 > 0$.

Damit beträgt der maximale Anstieg des Dammes auf der linken Seite 76,23°. Wenn wir die rechte Seite hätten mitbetrachten sollen, was hier nicht der Fall war lauf Aufgabenstellung, befindet sich bei der Nullstelle x = 8 das größte Gefälle (da rechts vom Hochpunkt das Gefälle ständig zunimmt bzw. $f'(x)$ hier streng monoton fällt und der Graben bei x = 8 endet). $f'(8) = -10$, womit $\alpha = \tan^{-1}(f'(8)) = \tan^{-1}(-10) \approx -84{,}29°$ beträgt. Die Funktion hat an der Stelle x = 8 somit einen Neigungswinkel von ca. -84,29°. Da es hier um eine Anwendungsaufgabe geht, wäre die Steigung auf der rechten Seite des Grabens maximal ca. 84,29°.