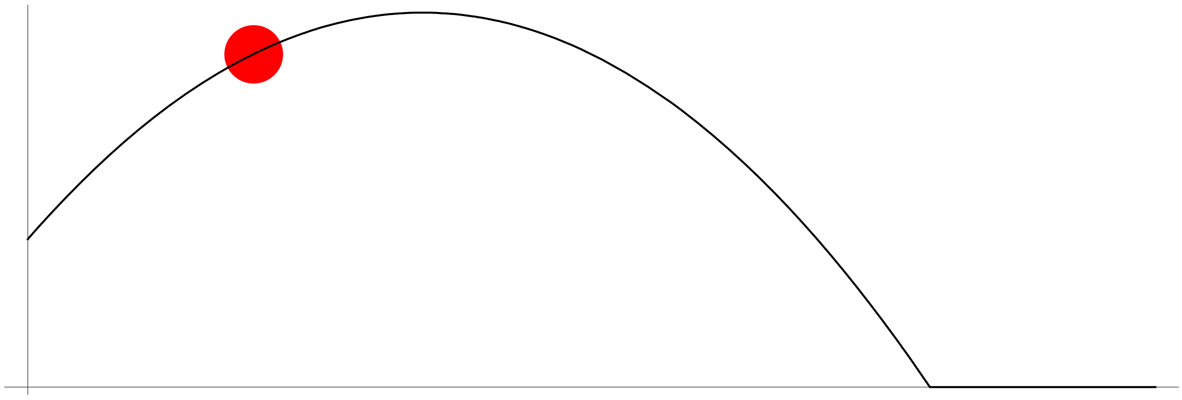
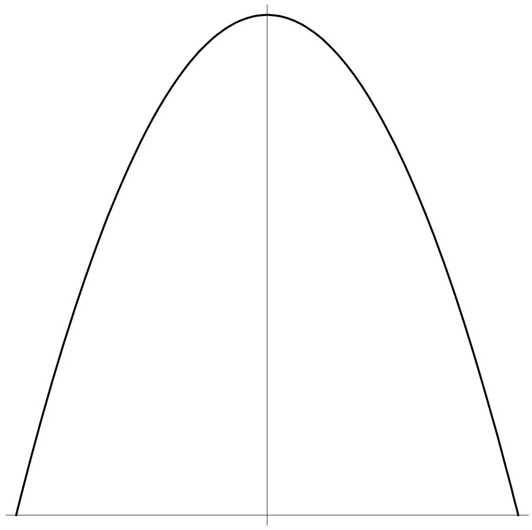
Anwendungsaufgaben zu Parabeln

1) $f(x) = -0{,}25x^2 + 1{,}75x + 2$ beschreibt die Flugbahn (x = Abstand zum Werfen in m, $f(x)$ = Höhe in m) eines Balles, der bei $x = 0$ abgeworfen wird (siehe Skizze).



a) Wie weit fliegt der Ball?
b) Wie hoch fliegt der Ball maximal?
c) Nach wie vielen Metern auf dem Boden (von der Abwurfstelle aus), erreicht der Ball das erste Mal eine Höhe von 4,5 m?
d) In welcher Höhe wird der Ball abgeworfen?

2) Ein Torbogen ist 3,2 m hoch und 8 m breit.



a) Wie lautet eine Funktionsgleichung, die den Verlauf des Torbogens beschreibt (einfachste Möglichkeit: Parabel symmetrisch zur y-Achse legen)?
b) Ein LKW ist 2 m Breit und 2,8 m hoch. Würde er durch den Torbogen passen?

3) Ein gekrümmte Straße hat den Verlauf einer Parabel mit der Gleichung $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$. Es soll eine gerade Straße gebaut werden, die mit der Gleichung $g(x) = m \cdot x + 1$ beschrieben werden kann und die gekrümmte Straße berührt (tangiert). Wie könnte m gewählt werden (Tipp: Gleichsetzen und m so bestimmen, dass es nur eine Berührstelle gibt)?

Lösungen:

a) Wir müssen die Nullstellen bestimmen. Wenn der Ball vom Boden aus geschossen worden wäre, dann wäre die Flugweite die Differenz aus der größten und der kleinsten Nullstelle. In unserem Fall ergibt sich die Flugweite durch die größte Nullstelle, da der Ball bei x = 0 abgeworfen wird.

$-0{,}25x^2 + 1{,}75x + 2 = 0 \mid : (-0{,}25)$

$x^2 - 7x - 8 = 0$

$x_{1/2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 + 8}$

$= 3{,}5 \pm 4{,}5$

$x_1 = 8$

$x_2 = -1$

Die Wurfweite beträgt 8 m.

b) Es muss der y- Wert des Scheitelpunkts y_s bestimmt werden. Da wir schon die Nullstellen kennen, wird keine quadratische Ergänzung benötigt. Wir kennen damit den x-Wert des Scheitelpunktes:

$x_s = (x1 + x2)/2 = 3{,}5$ (es wäre auch gleich $x_s = -\,p/2$, falls keine Nullstellen vorhanden sind)

$y_s = f(3{,}5) = -0{,}25 \cdot 3{,}5^2 + 1{,}75 \cdot 3{,}5 + 2$

$= 5{,}0625$

Damit ist die maximale Flughöhe 5,0625 m.

Scheitelpunkt über quadratische Ergänzung:

$f(x) = -0{,}25x^2 + 1{,}75x + 2$

$f(x) = -0{,}25[x^2 - 7x - 8]$

Quadratische Ergänzung: Bei $f(x) = a[x^2 + px + q]$ wird $(p/2)^2$ quadratisch ergänzt:

$f(x) = -0{,}25[x^2 - 7x + (-7/2)^2 - (-7/2)^2 - 8]$

Nun wird die 'Binomische Formel' verwendet, d.h. $x^2 + px + (p/2)^2 = (x + p/2)^2$:

$f(x) = -0{,}25[(x - 3{,}5)^2 - (-7/2)^2 - 8]$

$f(x) = -0{,}25[(x - 3{,}5)^2 - 20.25]$

$f(x) = -0{,}25(x - 3{,}5)^2 + 5.0625$

c) Hier ist der x-Wert (die Stelle) gesucht, an der der y-Wert (der Funktionswert) gleich 4,5 ist:

$-0{,}25x^2 + 1{,}75x + 2 = 4{,}5 \quad \mid -4{,}5$

$-0{,}25x^2 + 1{,}75x - 2{,}5 = 0 \quad \mid : (-0{,}25)$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_{1/2} = 3{,}5 \pm \sqrt{12{,}25 - 10}$

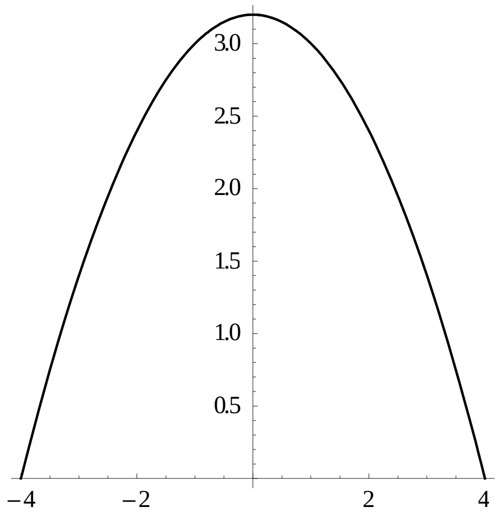
$= 3{,}5 \pm 1{,}5$

$x_1 = 2$; $x_2 = 5$

Also erreicht der Ball das erste Mal die Höhe von 4,5m nach 2m.

d) Da der Ball an der Stelle x = 0 abgeworfen wird: f(0) = 2, also wird dieser in 2 m Höhe abgeworfen.

2)



a) Eine zur y-Achse symmetrische Parabel hat eine Gleichung der Form $f(x) = a \cdot x^2 + b$

Diese soll nun durch die Punkte P(0; 3,2) (womit der Bogen 3,2 m hoch ist) und Q(4; 0) (womit der Bogen 8 m breit ist, siehe Graph oben) verlaufen.

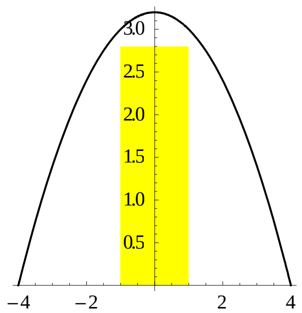
(1) f(0) = 3,2 ⇔ b = 3,2
(2) f(4) = 0 ⇔ 16a + b = 0

Nun kann (1) in (2) eingesetzt werden: 16a + 3,2 = 0 | - 3,2
16a = -3,2 | : 16

Damit ist a = -0,2 und $f(x) = -0{,}2x^2 + 3{,}2$

b) Hier muss geprüft werden, ob f(1) oder f(-1) größer oder gleich (wobei das knapp wäre) der Höhe des LKW, also 2,8 (m) ist.

$f(1) = -0{,}2 \cdot 1^2 + 3{,}2 = 3$. Damit wäre, wenn der LKW genau in der Mitte der Straße fährt, noch 0,2m Platz (an den engsten Stellen, also an den Rändern, siehe Graph unten).



3) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ und $g(x) = mx + 1$ wurden gegeben.

m soll so bestimmt werden, dass die Parabel f von der Geraden g berührt wird.

$f(x) = g(x)$

$2x^2 - 4x + 3 = m \cdot x + 1 \mid -m \cdot x - 1$
$2x^2 - 4x - m \cdot x + 2 = 0 \mid : 2$
$x^2 - 2x - m/2 \cdot x + 1 = 0$

Es gilt: $p = -2 - m/2$ und $q = 1$

$x_{1/2} = 1 + \frac{m}{4} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{m}{4}\right)^2 - 1}$

Damit die Gerade g die Parabel berührt, muss unter der Wurzel eine Null stehen:

$(1 + \frac{m}{4})^2 - 1 = 0$

Möglichkeit 1:

$(1 + \frac{m}{4})^2 = 1 \mid \sqrt{\ }$
$1 + \frac{m}{4} = \pm 1$
$\frac{m}{4} = -1 \pm 1$
$m_1 = 0$
$m_2 = -8$

Möglichkeit 2:

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$1 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{m}{4} + (\frac{m}{4})^2 - 1 = 0$
$1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{16} - 1 = 0$
$1/16 \cdot m^2 + 1/2 \cdot m = 0 \mid \cdot 16$
$m^2 + 8m = 0$
$m \cdot (m + 8) = 0$
$m_1 = 0 ; m_2 = -8$

Wir haben also 2 Möglichkeiten für die Gleichung der geraden Straße gefunden:

$g(x) = 1$ oder $g(x) = -8x + 1$