Elementare Aufgaben zur Differentialrechnung

1) $f(x) = x^3 - 6x + 1$

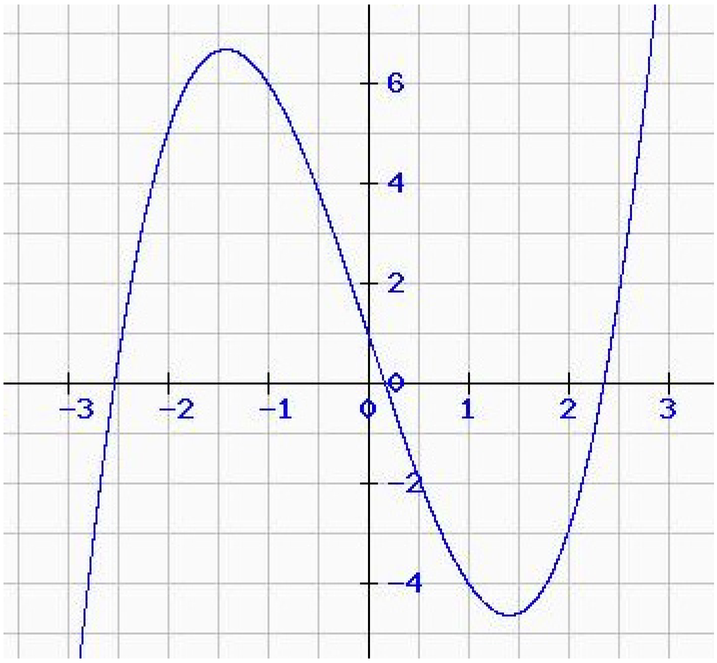
a) Wie ist die Steigung an der Stelle $x = 2$?
b) Wie ist der Neigungswinkel an der Stelle $x = -1{,}5$?

2) $f(x) = 2x^3 - 8x$

a) In welchem Punkt ist die Steigung $m = -2$?
b) In welchem Punkt ist der Neigungswinkel 45°? (Ergebnis auf 2 Stellen gerundet)
c) An welcher Stelle ist die Tangente an der Graph von f orthogonal zu $h(x) = -\frac{2}{11}x + 4$?
d) Wo liegen die Stellen mit waagrechten Tangenten an f?

Lösungen:

1) a)



$f'(x) = 3x^2 - 6$ ist Steigung an der Stelle x.

Steigung an der Stelle $x = 2$: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 = 6$

b) $f'(-1{,}5) = 3 \cdot (-1{,}5)^2 - 6 = 0{,}75$

Es gilt: $f'(x_0) = \tan(\alpha)$ (bzw. $\alpha = \tan^{-1}(f'(x_0))$)

$0{,}75 = \tan(\alpha)$ $|\tan^{-1}(\ )$

$\alpha = \tan^{-1}(0{,}75) \approx 36{,}87°$

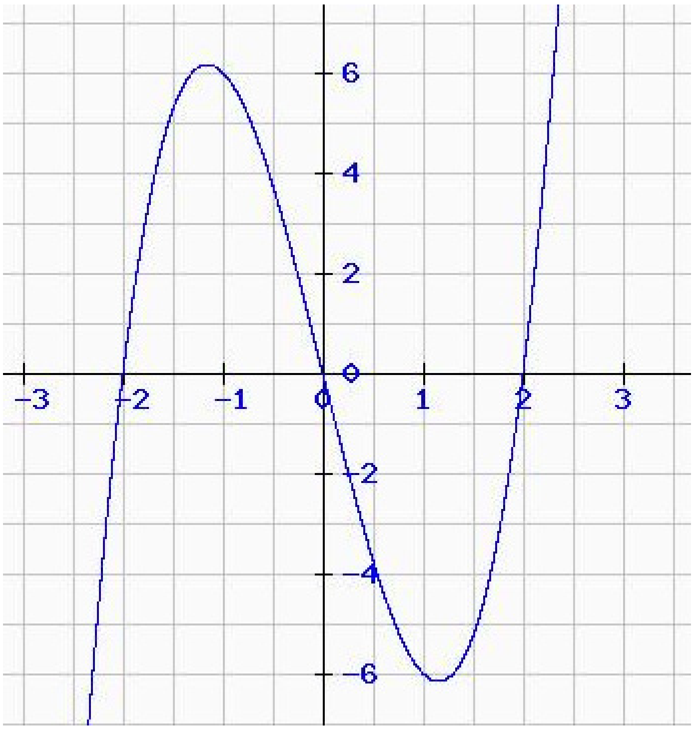
2) a) $f'(x) = 6x^2 - 8$
Steigung soll - 2 sein, somit müssen wir die Gleichung $f'(x) = -2$ nach x auflösen:

$f'(x) = -2$
$6x^2 - 8 = -2$ $\quad | +8$
$6x^2 = 6$ $\quad | :6$
$x^2 = 1$ $\quad | \sqrt{\ }$

$x_{1/2} = \pm 1$ (also gibt es 2 Stellen, an denen die Steigung 2 beträgt)

Da nicht nur die Stellen, sondern Punkte gesucht werden, muss noch $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ in f(x) eingesetzt werden:

$y_1 = f(1) = -6 \Rightarrow P_1(1; -6)$
$y_2 = f(-1) = 6 \Rightarrow P_2(-1; 6)$ (klar, wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung)



b) $f'(x) = \tan(45°)$

$6x^2 - 8 = 1 \quad | +8$
$6x^2 = 9 \quad | :6$
$x^2 = \frac{3}{2} \quad |\sqrt{}$

$x_1 = \sqrt{3/2} \approx 1{,}22$; $x_2 = -\sqrt{3/2} \approx -1{,}22$

$y_1 = f\left(\sqrt{3/2}\right) \approx -6{,}12 \Rightarrow P_1(1{,}22; -6{,}12)$
$y_2 = f\left(-\sqrt{3/2}\right) \approx 6{,}12 \Rightarrow P_2(-1{,}22; 6{,}12)$

c) Wenn m_t die Tangentensteigung ist und m_n die Normalensteigung ist (und keine der beiden Steigungen gleich 0 ist), dann gilt $m_t \cdot m_n = -1$.

Also $m_t = -1/m_n$ (die Tangentensteigung ist negative Kehrwerte der Normalensteigung)

Da $h(x) = -2/11x + 4$ die Normale ist, ist die Normalensteigung $m_n = -2/11 \Rightarrow m_t = 11/2$.

Wo ist also die Tangentensteigung gleich 11/2?

$f'(x) = 11/2$
$6x^2 - 8 = 11/2 \quad |+8$
$6x^2 = 27/2 \quad | :6$
$x^2 = 9/4 \quad | \sqrt{}$

$x_{1/2} = \pm 3/2$

Also sind die gesuchten Stellen $x_1 = 3/2$ und $x_2 = -3/2$. Da nur die Stellen gesucht sind, müssen keine y-Werte bzw. Funktionswerte berechnet werden.

d) An den Stellen mit waagrechten Tangenten muss die Steigung 0 sein. Somit müssen wird die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auflösen:

$$f'(x) = 0$$
$$6x^2 - 8 = 0 \quad | + 8$$
$$6x^2 = 8 \quad | :6$$
$$x^2 = 4/3 \quad | \sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{4/3} = \pm\, 4/\sqrt{3} \approx \pm 1{,}15$$