Extrema bei verschiedenen Varianten von Exponentialfunktionen

Es soll jeweils die Art und Lage der Extrempunkte bestimmt werden:

1)

a) $f(x) = (x - 2) \cdot e^{x}$

b) $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

c) $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{x}$

d) $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x}$

e) $f(x) = x \cdot e^{-2x + 1}$

2)

a) $f(x) = 2e^{x} + 4e^{-x}$

b) $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-3x}$

c) $f(x) = e^{-2x} + 4x$

3)

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = \frac{e^{-x}}{(2+e^{-x})^2}$ (nur notwendige Bedingung)

Lösungen:

1) a) $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$

$$u(x) = x - 2 \qquad u'(x) = 1$$
$$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$$

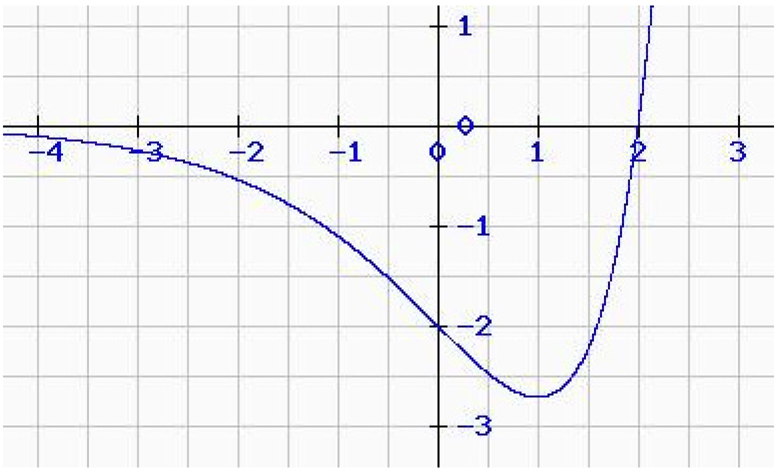
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (x - 2) = (1 + x - 2) \cdot e^x = (x - 1) \cdot e^x$

Analog: $f''(x) = 1 \cdot e^x + e^x \cdot (x - 1) = (1 + x - 1) \cdot e^x = x \cdot e^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ (und $e^x = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist $x = 1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(1) = 1 \cdot e^1 = e > 0$, also Tiefpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(1) = (1-2) \cdot e^1 = -e \approx -2{,}72$. Also ist $E(1; -e) \approx E(1; -2{,}72)$ der Tiefpunkt der Funktion.



b) $f(x) = (2x + 2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

$$u(x) = 2x + 2 \qquad u'(x) = 2$$
$$v(x) = e^{-1/2 \cdot x} \qquad v'(x) = -1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x}$$

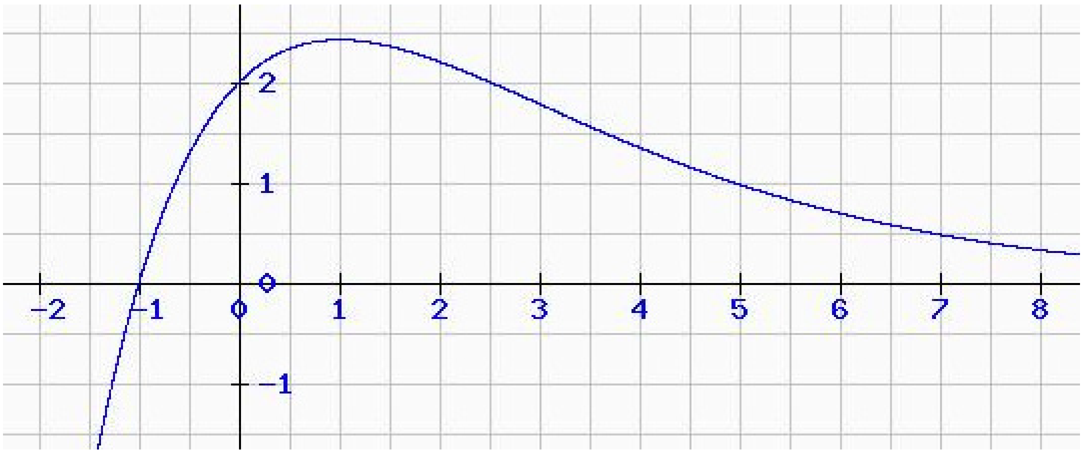
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = 2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} - 1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \cdot (2x + 2) = (2 - 1/2 \cdot (2x + 2)) \cdot e^{-1/2 \cdot x} = (-x + 1) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

Analog: $f''(x) = -1 \cdot e^{-1/2 \cdot x} - 1/2 \cdot e^{-1/2 \cdot x} \cdot (-x + 1) = (-1 - 1/2 \cdot (-x + 1)) \cdot e^{-1/2 \cdot x} = (1/2 \cdot x - 3/2) \cdot e^{-1/2 \cdot x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 1 = 0$ (und $e^{-1/2 \cdot x} = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist $x = 1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(1) = -1 \cdot e^{-1/2} = -e^{-1/2} < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(1) = (2+2) \cdot e^{-1/2} = 4e^{-1/2} \approx 2{,}43$. Also ist $E(1; 4e^{-1/2}) \approx E(1; 2{,}43)$ ein Hochpunkt.



c) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\cdot e^x$

$u(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad u'(x) = 2x - 2$
$v(x) = e^x \qquad v'(x) = e^x$

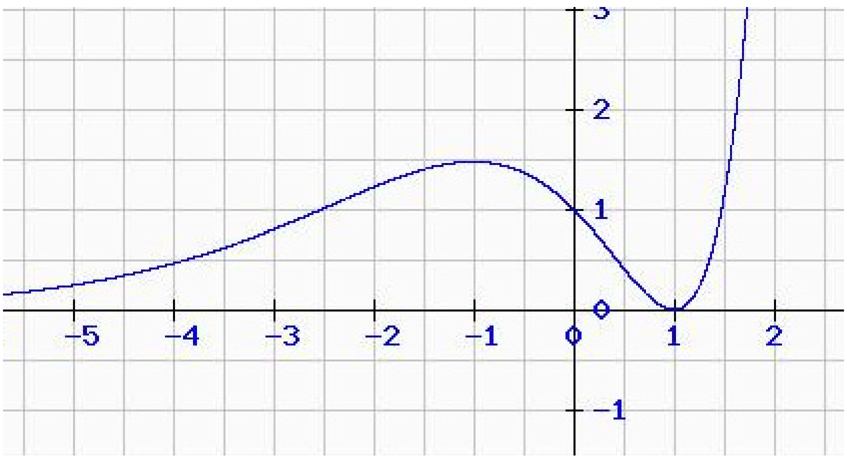
$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = (2x - 2)\cdot e^x + e^x\cdot(x^2 - 2x + 1) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 1)\cdot e^x = (x^2 - 1)\cdot e^x$

Analog: $f''(x) = 2x\cdot e^x + e^x\cdot(x^2 - 1) = (2x + x^2 - 1)\cdot e^x = (x^2 + 2x - 1)\cdot e^x$

$f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0$ (und $e^x = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(1) = 2\cdot e^1 = 2e > 0$, also Tiefpunkt.
$f''(-1) = -2\cdot e^{-1} < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(1) = 0\cdot e^1 = 0$. Also ist $E_1(1; 0)$ ist ein Tiefpunkt.
$f(-1) = 4\cdot e^{-1} \approx 1{,}47$. Also ist $E_2(-1; 4\cdot e^{-1}) \approx E_2(-1; 1{,}47)$ ist ein Hochpunkt.



d) $f(x) = (x^2 - 3)\cdot e^{-x}$

$u(x) = x^2 - 3 \qquad u'(x) = 2x$
$v(x) = e^{-x} \qquad v'(x) = -e^{-x}$

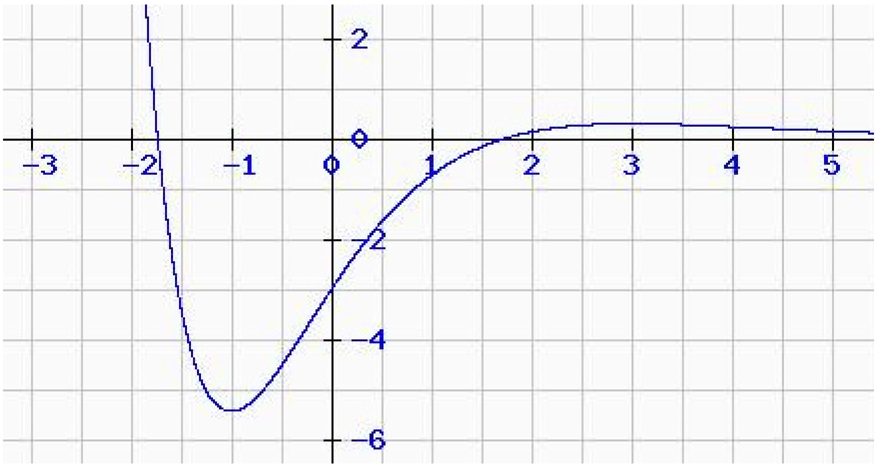
$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = 2x\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot(x^2 - 3) = (2x - (x^2 - 3))\cdot e^{-x} = (-x^2 + 2x + 3)\cdot e^{-x}$

Analog: $f''(x) = (-2x + 2)\cdot e^{-x} - e^{-x}\cdot(-x^2 + 2x + 3) = (-2x + 2 - (-x^2 + 2x + 3))\cdot e^{-x} = (x^2 - 4x - 1)\cdot e^{-x}$

$f'(x) = 0 \iff -x^2 + 2x + 3 = 0$ (und $e^x = 0$, was aber keine Lösung hat) $\iff x^2 - 2x - 3 = 0$
Damit ist $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(3) = -4\cdot e^{-3} < 0$, also Hochpunkt.
$f''(-1) = 4\cdot e > 0$, also Tiefpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(3) = 6\cdot e^{-3} \approx 0{,}3$. Also ist $E_1(3;\, 6\cdot e^{-3}) \approx E_1(3;\, 0{,}3)$ ist ein Hochpunkt.
$f(-1) = -2\cdot e \approx -5{,}44$. Also ist $E_2(-1;\, -2\cdot e) \approx E_2(-1;\, -5{,}44)$ ist ein Tiefpunkt.



e) $f(x) = x\cdot e^{-2x+1}$

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-2\cdot x+1} \qquad v'(x) = -2\cdot e^{-2\cdot x+1}$

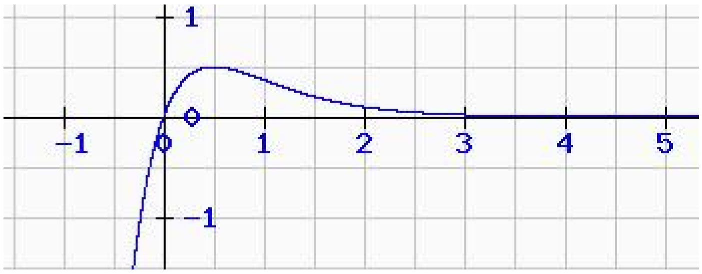
$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + v'(x)\cdot u(x) = 1\cdot e^{-2\cdot x+1} - 2\cdot e^{-2\cdot x+1}\cdot x = (1 - 2x)\cdot e^{-2\cdot x+1}$

Analog: $f''(x) = -2\cdot e^{-2\cdot x+1} - 2\cdot e^{-2\cdot x+1}\cdot(1 - 2x) = (-2 - 2\cdot(1 - 2x))\cdot e^{-2\cdot x+1} = (4x - 4)\cdot e^{-2\cdot x+1}$

$f'(x) = 0 \iff 1 - 2x = 0$ (und $e^{-2\cdot x+1} = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist $x = 1/2$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(1/2) = -2\cdot e^0 = -2 < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(1/2) = 1/2\cdot e^0 = 1/2$. Also ist $E(1/2;\, 1/2)$ ein Hochpunkt.



2) a) $f(x) = 2e^{x} + 4e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{x} - 4e^{-x}$

$f''(x) = 2e^{x} + 4e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x} - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{x} = 4e^{-x} \Leftrightarrow e^{x} = 2e^{-x} \quad | :e^{-x}$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln(\,)$

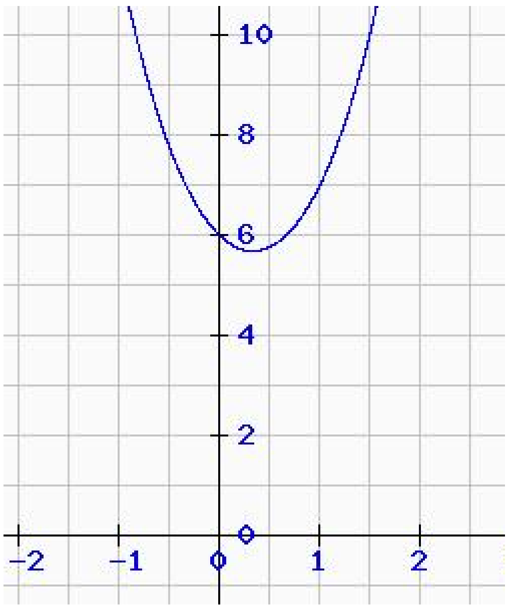
$2x = \ln(2) \quad | :2$

Damit ist $x = \ln(2)/2 \approx 0{,}35$.

Oben wurde beim Dividieren durch e^{-x} das Potenzgesetzt $a^{n} : a^{m} = a^{n-m}$ verwendet:
$e^{x} : e^{-x} = e^{x-(-x)} = e^{2x}$

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(\ln(2)/2) = 4 \cdot \sqrt{2} > 0$, also Tiefpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(\ln(2)/2) = 4 \cdot \sqrt{2} \approx 5{,}66$. Also ist $E(\ln(2)/2;\ 4 \cdot \sqrt{2}) \approx E(0{,}35;\ 5{,}66)$ ist Tiefpunkt.



b) $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{-3x}$

$f'(x) = 6e^{2x} + 6e^{-3x}$

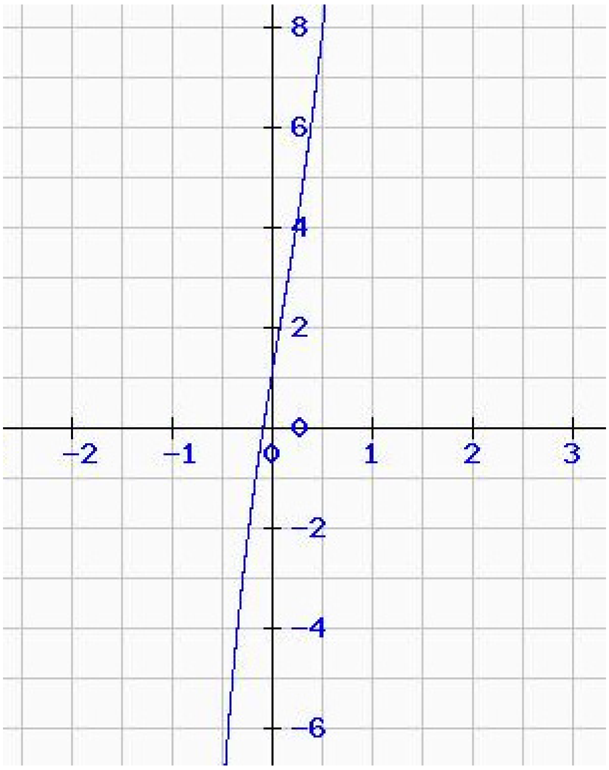
$f''(x) = 12e^{2x} - 18e^{-3x}$

$f'(x) = 0 \iff 6e^{2x} + 6e^{-3x} = 0 \iff 6e^{2x} = -6e^{-3x}$ (Ab hier ist schon klar, dass keine Lösung existiert.)

$\iff e^{2x} = -e^{-3x} \quad | :e^{-3x}$

$e^{5x} = -1 \quad | \ln(\,)$

Damit existieren keine Extrema bei dieser Funktion, denn ln(a) kann nur für a > 0 berechnet werden.



c) $f(x) = e^{-2x} + 4x$

$f'(x) = -2e^{-2x} + 4$

$f''(x) = 4e^{-2x}$

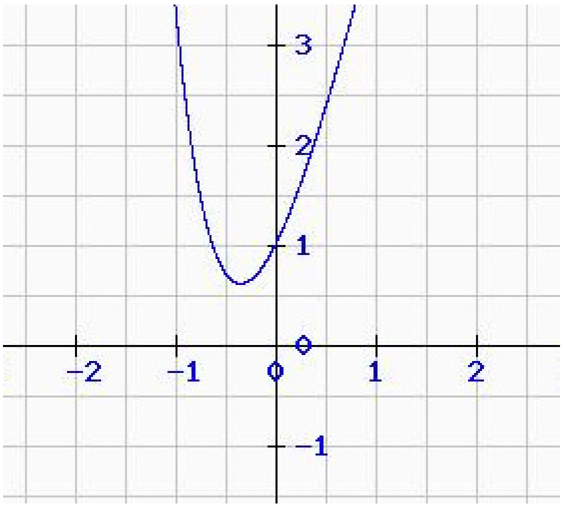
$f'(x) = 0 \iff -2e^{-2x} + 4 = 0 \iff -2e^{-2x} = -4 \iff e^{-2x} = 2 \quad | \ln(\,)$

$-2x = \ln(2) \quad | : (-2)$

Damit ist $x = -\ln(2)/2 \approx -0{,}35$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(-\ln(2)/2) = 8 > 0$, also Tiefpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(-\ln(2)/2) = 2 - 2\cdot\ln(2) \approx 0{,}61$. Also ist $E(-\ln(2)/2;\ 2 - 2\cdot\ln(2)) \approx E(-0{,}35;\ 0{,}61)$ ein Tiefpunkt.



3) a) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$ (Ergab sich über die Kettenregel, innere Ableitung war -2x.)

Für die zweite Ableitung wird die Produktregel benötigt.

$u(x) = -2x \qquad u'(x) = -2$

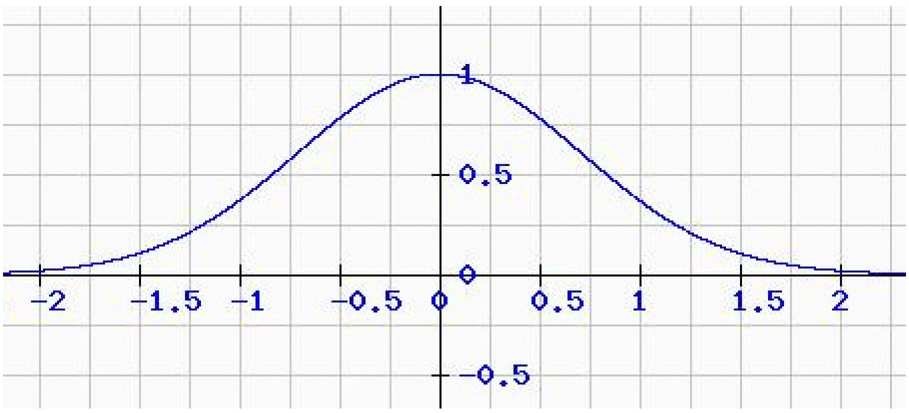
$v(x) = e^{-x^2} \qquad v'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

$f''(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) = -2 \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (-2 - 2x \cdot (-2x)) \cdot e^{-x^2} = (4x^2 - 2) \cdot e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0$ (und $e^{-x^2} = 0$, was aber keine Lösung hat)
Damit ist $x = 0$.

In $f''(x)$ einsetzen: $f''(0) = -2 \cdot e^0 = -2 < 0$, also Hochpunkt.

In $f(x)$ einsetzen: $f(0) = e^0 = 1$. Also ist E(0; 1) ein Hochpunkt.



b) f(x) = $\frac{e^{-x}}{(2+e^{-x})^2}$ (nur notwendige Bedingung)

Wir benötigen die Quotientenregel:

$u(x) = e^{-x}$ $\qquad$ $u'(x) = -e^{-x}$

$v(x) = (2+e^{-x})^2$ $\qquad$ $v'(x) = -e^{-x} \cdot 2 \cdot (2+e^{-x}) = -2 \cdot e^{-x} \cdot (2+e^{-x})$

Bei v´ wurde die Kettenregel verwendet. Wir dürfen nicht ausmultiplizieren, denn wir können gleich den Faktor $(2+e^{-x})$ kürzen.

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2} = \frac{-e^{-x} \cdot (2+e^{-x})^2 + 2 \cdot e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) \cdot e^{-x}}{((2+e^{-x})^2)^2}$$

$$= \frac{[-e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) + 2 \cdot e^{-2x}] \cdot (2+e^{-x})}{(2+e^{-x})^4} = \frac{-e^{-x} \cdot (2+e^{-x}) + 2 \cdot e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3} = \frac{-2 \cdot e^{-x} - e^{-2x} + 2 \cdot e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3}$$

$$= \frac{-2 \cdot e^{-x} + e^{-2x}}{(2+e^{-x})^3}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot e^{-x} + e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot e^{-x} = -e^{-2x} \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-x} = e^{-2x} \quad | : e^{-x}$

$2 = e^{-x} \quad | \ln(\,)$

$\ln(2) = -x$

Damit ist $x = -\ln(2) \approx -0{,}69$

Bei dieser Aufgabe sollte nur die notwendige Bedingung geprüft werden. Damit benötigen wir keine zweite Ableitung. Für Interessierte, hier wäre

$f''(x) = \frac{e^{-3x} - 8e^{-2x} + 4e^{-x}}{(2+e^{-x})^4}$ und $f''(-\ln(2)) = -1/16 < 0$, also Hochpunkt.

$f(-\ln(2)) = 1/8$, also ist $E(-\ln(2); 1/8) \approx E(-0{,}69; 0{,}125)$ ein Hochpunkt.