Integralrechnung: Ober- und Untersummen berechnen

1) Gesucht wird der Wert der Obersumme O_4 und U_4 (4 Rechtecke) für die Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2$ für das Intervall I = [0 ; 1]

b) $f(x) = x^2 + 2$ für das Intervall I = [0 ; 1]

c) $f(x) = -x^2 + 4$ für das Intervall I = [0 ; 2]

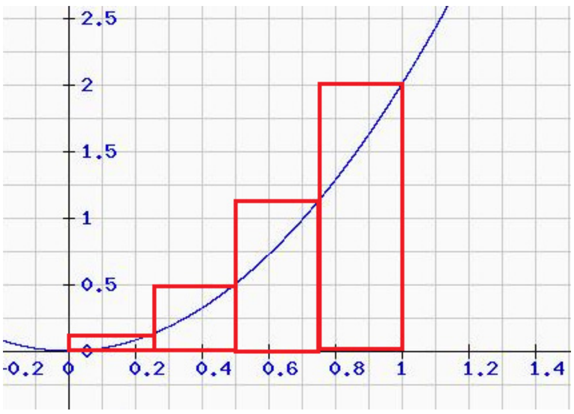
d) $f(x) = 0{,}1x^3$ für das Intervall I = [4 ; 8]

2) Gesucht werden O_n und U_n für die Funktionen und Intervalle aus 1) a) bis c). Für O_n und U_n soll auch jeweils der Grenzwert ($n \to \infty$) bestimmt werden.

Lösungen:

1) a) $f(x) = 2x^2$ für das Intervall I = [0 ; 1]:

O_4: Grafik zu O_4



Breite der Rechtecke: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = 1/4$

Stellen für die Obersumme: 1/4, 2·1/4, 3·1/4, 4·1/4

(Rechter Rand der Intervalle, da die Funktion auf I = [0; 1] streng monoton steigend ist und somit rechts jeweils der größere Funktionswert vorliegt.)

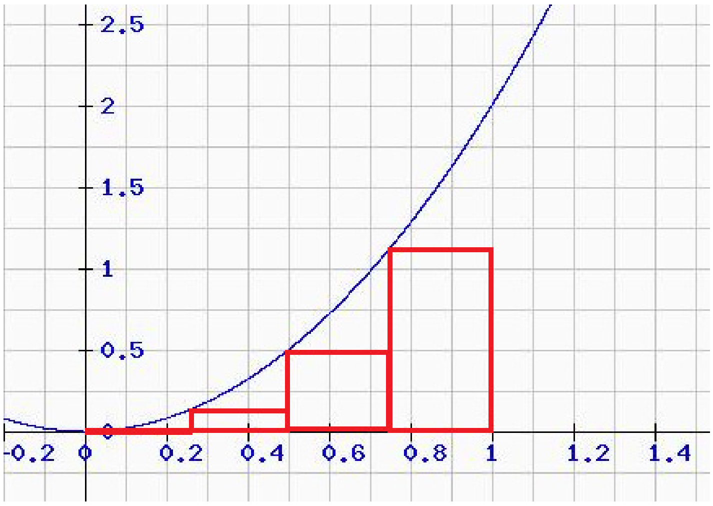
$O_4 = 1/4 \cdot f(1/4) + 1/4 \cdot f(2/4) + 1/4 \cdot f(3/4) + 1/4 \cdot f(4/4)$

$= 1/4 \cdot (f(1/4) + f(2/4) + f(3/4) + f(4/4))$ (noch ungekürzt)

$= 1/4 \cdot (2 \cdot (1/4)^2 + 2 \cdot (1/2)^2 + 2 \cdot (3/4)^2 + 2 \cdot 1^2) = 15/16$

Mit dem Taschenrechner könnte man auch $O_4 = 1/4 \cdot \sum_{x=1}^{4} f(x \cdot 1/4) = 1/4 \cdot \sum_{x=1}^{4} 2 \cdot (x \cdot 1/4)^2$ berechnen (wenn dieser eine Summentaste besitzt).

U_4: Grafik zu U_4



Stellen für die Untersumme: 0, 1/4, 2/4, 3/4 (ungekürzt, damit das Schema zu sehen ist)

(Linker Rand der Intervalle, da die Funktion auf I = [0; 1] streng monoton steigend ist und somit links jeweils der kleinere Funktionswert vorliegt.)

$U_4 = 1/4 \cdot (f(0) + f(1/4) + f(2/4) + f(3/4))$
$= 1/4 \cdot (2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (1/4)^2 + 2 \cdot (1/2)^2 + 2 \cdot (3/4)^2) = 7/16$

Mit dem Taschenrechner und der $\sum_{x=\square}^{\square} \square$ Taste:

$O_4 = 1/4 \cdot \sum_{x=0}^{3} f(x \cdot 1/4) = 1/4 \cdot \sum_{x=0}^{3} 2 \cdot (x \cdot 1/4)^2$

b) $f(x) = x^2 + 2$ für das Intervall I = [0 ; 1]:

O_4: Grafik zu O_4

$O_4 = 1/4 \cdot (f(1/4) + f(2/4) + f(3/4) + f(4/4))$

$= 1/4 \cdot ((1/4)^2 + 2 + (1/2)^2 + 2 + (3/4)^2 + 2 + 1^2 + 2)$

$= 1/4 \cdot (4 \cdot 2 + (1/4)^2 + (1/2)^2 + (3/4)^2 + 1^2) = 79/32$

Taschenrechner: $O_4 = 1/4 \cdot \sum_{x=1}^{4}((1/4 \cdot x)^2 + 2)$

U_4:

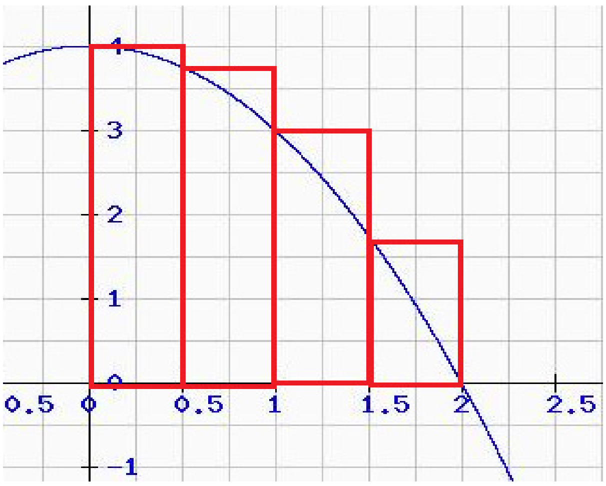
$U_4 = 1/4 \cdot (f(0) + f(1/4) + f(2/4) + f(3/4))$

$= 1/4 \cdot (0^2 + 2 + (1/4)^2 + 2 + (1/2)^2 + 2 + (3/4)^2 + 2) = 71/32$

Taschenrechner: $U_4 = 1/4 \cdot \sum_{x=0}^{3}((1/4 \cdot x)^2 + 2)$

c) $f(x) = -x^2 + 4$ für das Intervall $I = [0 ; 2]$:

O_4: Grafik zu O_4



Breite der Rechtecke: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = 1/2$

Hier muss für die Berechnung der Obersumme jeweils der Funktionswert am linken Rand verwendet werden, denn die Funktion ist auf $I = [0; 2]$ streng monoton fallend.

$O_4 = 1/2 \cdot (f(0) + f(1/2) + f(2/2) + f(3/2))$

$= 1/2 \cdot ((-0^2 + 4) + (-(1/2)^2 + 4) + (-1^2 + 4) + (-(3/2)^2 + 4)) = 25/4$

Die zweite Klammer im Inneren wurde zur besseren Übersicht gesetzt, man hätte auch direkt $1/2 \cdot (-0^2 + 4 - (1/2)^2 + 4 - 1^2 + 4 - (3/2)^2 + 4)$ schreiben können.

Mit dem Taschenrechner: $O_4 = 1/2 \cdot \sum_{x=0}^{3}(-(x \cdot 1/2)^2 + 4)$

U_4:

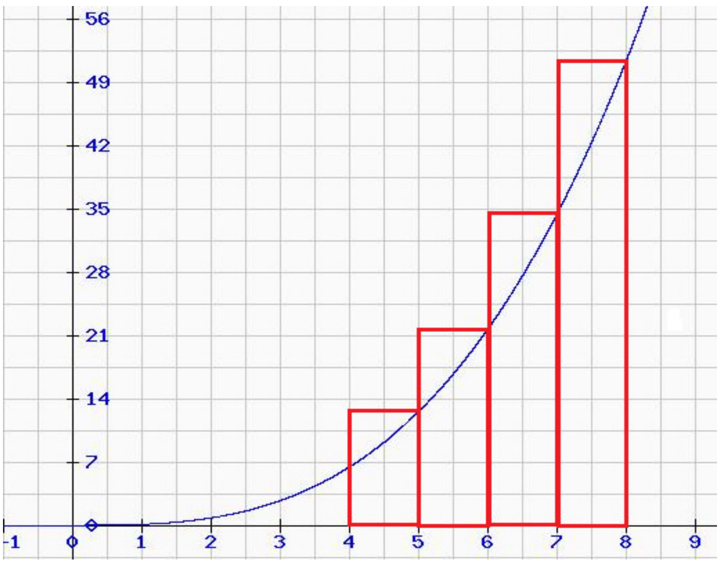
$U_4 = 1/2 \cdot (f(1/2) + f(2/2) + f(3/2) + f(4/2))$

$= 1/2 \cdot ((-(1/2)^2 + 4) + (-1^2 + 4) + (-(3/2)^2 + 4) + (-2^2 + 4)) = 17/4$

Oder mit dem Taschenrechner: $U_4 = 1/2 \cdot \sum_{x=1}^{4}(-(x \cdot 1/2)^2 + 4)$

d) $f(x) = 0{,}1x^3$ für das Intervall $I = [4 ; 8]$:

O_4: Grafik zu O_4



Breite der Rechtecke: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{8-4}{4} = 1$

$O_4 = 1 \cdot (f(5) + f(6) + f(7) + f(8))$

$= 0{,}1 \cdot 5^3 + 0{,}1 \cdot 6^3 + 0{,}1 \cdot 7^3 + 0{,}1 \cdot 8^3$ (0,1 hätten auch ausgeklammert werden können)

$= 119{,}6$

Taschenrechner: $O_4 = 1 \cdot \sum_{x=5}^{8} 0{,}1 \cdot (x \cdot 1)^3 = \sum_{x=5}^{8} 0{,}1 \cdot x^3$

oder $O_4 = 1 \cdot \sum_{x=1}^{4} 0{,}1 \cdot (4 + x \cdot 1)^3$

U_4:

$U_4 = 1 \cdot (f(4) + f(5) + f(6) + f(7))$

$= 0{,}1 \cdot 4^3 + 0{,}1 \cdot 5^3 + 0{,}1 \cdot 6^3 + 0{,}1 \cdot 7^3$

$= 74{,}8$

Taschenrechner: $U_4 = \sum_{x=4}^{7} 0{,}1 \cdot x^3$ oder $U_4 = \sum_{x=0}^{3} 0{,}1 \cdot (x+4)^3$

<u>Allgemein gilt</u>:

On =h· $\sum_{x=1}^{n} f(a + h \cdot x)$

(bei streng monoton steigender Funktionen auf I)

I = [a; b]

$h = \frac{b-a}{n}$

2) a) f(x) = $2x^2$ für das Intervall I = [0 ; 1]:

Breite der Rechtecke: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 1/n$

Stellen für die Obersumme: 1·1/n, 2·1/n, 3·1/n, …, n·1/n

O_n = 1/n· (f(1/n) + f(2/n) + … + f(n/n))

= 1/n· (2· $(1/n)^2$ + 2· $(2/n)^2$ + … + 2· $(n/n)^2$)

= 1/n· (2· $(1/n)^2$ + 2· $(2\cdot 1/n)^2$ + … + 2· $(n\cdot 1/n)^2$)

= 1/n· 2· $(1/n)^2$ · (1 + 2^2+ 3^2 + … + n^2) da $(i \cdot 1/n)^2 = i^2\cdot(1/n)^2$

= $2/n^3\cdot(1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$

Mit der Summenformel $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = 1/6\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ ergibt sich:

$O_n = \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$= \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{3n^3} = \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{3n^2}$

Stellen für die Untersumme: 0·1/n, 2·1/n, 3·1/n, …, (n-1)·1/n

U_n = 1/n·(f(0) + f(1/n) + f(2·1/n) + … + f((n-1) ·1/n))

= 1/n·(2·0^2 + 2·$(1/n)^2$ + 2·$(2\cdot 1/n)^2$ + … + 2·$((n-1)\cdot 1/n)^2$)

= 1/n·2·(0^2 + $(1/n)^2$ + $(1/n)^2\cdot 2^2$ + $(1/n)^2\cdot 3^2$ + … + $(n-1)^2\cdot(n-1)^2$)

$= 1/n \cdot 2 \cdot (1/n)^2 \cdot (0^2+1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)$

$= 2/n^3 \cdot (1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)$

Nun benötigen wir eine Summenformel für $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2$

Es gilt: $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Hier müssen wir nur für „n“ den Term „n-1“ einsetzen:

$1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\cdot(n-1+1)\cdot(2\cdot(n-1)+1)}{6}$

$= \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-2+1)}{6}$

$= \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

Es folgt mit der Summenformel:

$U_n = 2/n^3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

$= \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{3n^3} = \frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{3n^2}$

Wir führen nun den Grenzübergang $n \to \infty$ durch:

$O_n = \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{3n^2} = \frac{2n^2+n+2n+1}{3n^2} = \frac{2n^2+3n+1}{3n^2}$

$= \frac{2n^2}{3n^2} + \frac{3n}{3n^2} + \frac{1}{3n^2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$

$\lim_{n\to\infty} On = 2/3 \qquad (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n^2} = 0)$

$U_n = \frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{3n^2} = \frac{2n^2-n-2n+1}{3n^2} = \frac{2n^2-3n+1}{3n^2}$

$= \frac{2n^2}{3n^2} - \frac{3n}{3n^2} + \frac{1}{3n^2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = 2/3$$

Wie zu sehen ist, sind beide Grenzwerte gleich und entsprechen dem Flächeninhalte zwischen der Kurve von f und der x-Achse über dem Intervall I = [0 ; 1].

b) $f(x) = x^2 + 2$ für das Intervall $I = [0 ; 1]$:

Breite der Rechtecke: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = 1/n$

Stellen für die Obersumme: 1/n, 2/n, 3/n, …, n/n (wie bei a))

$O_n = 1/n\cdot(f(1/n) + f(2/n) + \ldots + f(n/n))$

$= 1/n\cdot((1/n)^2 + 2 + (2\cdot 1/n)^2 + 2 + (3\cdot 1/n)^2 + 2 + \ldots + (n\cdot 1/n)^2 + 2)$

$= 1/n\cdot(2+2+ \ldots +2 + (1/n)^2 + (1/n)^2\cdot 2^2 + \ldots +(1/n)^2\cdot n^2)$

$= 1/n\cdot(2n + (1/n)^2 \cdot(1+2^2+3^2+\ldots+n^2))$

$= 2 + (1/n)^3\cdot(1^2+2^2+\ldots+n^2)$

$= 2 + (1/n)^3 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$= 2 + \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^2}$ $((1/n)^3 = 1/n^3)$

$U_n = 1/n\cdot(f(0) + f(1/n) + f(2\cdot 1/n) + \ldots + f((n-1) \cdot 1/n))$

$= 1/n\cdot(0^2 + 2 + (1/n)^2 + 2 + (2\cdot 1/n)^2 + 2+ \ldots + ((n-1) \cdot 1/n)^2 + 2)$

$= 1/n\cdot(2+2+\ldots+2 + (1/n)^2 + (1/n)^2 \cdot 2^2+ (1/n)^2\cdot 3^2+ \ldots +(1/n)^2 \cdot(n-1)^2)$

$= 1/n\cdot(2n + 1/n^2\cdot(1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2))$

$= 2 + (1/n)^3\cdot(1+2^2+\ldots+(n-1)^2)$

$= 2 + 1/n^3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} = 2 + \frac{(n-1)\cdot(2n+1)}{6n^2}$

Da wir bei 2 a) gezeigt hatten, dass $1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

Grenzübergang $n \to \infty$:

$O_n = 2 + \frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^2} = 2 + \frac{2n^2+n+2n+1}{6n^2}$

$= 2 + \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = 2 + \frac{2n^2}{6n^2} + \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}$

$= 2 + 1/3 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

$= 7/3 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

$\lim_{n\to\infty} O_n = 7/3$

$U_n = 2 + \frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{6n^2} = 2 + \frac{2n^2-n-2n+1}{6n^2}$

$= 2 + \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} = 2 + \frac{2n^2}{6n^2} - \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}$

$= 2 + 2/6 - \frac{3n}{6n^2} + \frac{1}{6n^2}$ (hier noch ungekürzt)

$= 7/3 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$

$\lim_{n\to\infty} U_n = 7/3$

2 c) $f(x) = -x^2 + 4$ für das Intervall $I = [0 ; 2]$:

Breite der Rechtecke: $h = \frac{2-0}{n} = 2/n$

Stellen für Obersumme: $0, 2/n, 2\cdot 2/n, 3\cdot 2/n, \ldots, (n-1)\cdot 2/n$

$O_n = 2/n\cdot(f(0) + f(2/n) + f(2\cdot 2/n) + \ldots + f((n-1)\cdot 2/n))$

$= 2/n\cdot(-0^2 + 4 - (2/n)^2 + 4 -(2\cdot 2/n)^2 + 4 - (3\cdot 2/n)^2+4 \pm \ldots - ((n-1)\cdot 2/n)^2 + 4)$

$= 2/n\cdot(4 + 4 + 4 + \ldots + 4 - (2/n)^2 - (2/n)^2 \cdot 2^2 - (2/n)^2 \cdot 3^2 - \ldots - (2/n)^2 \cdot (n-1)^2)$

$= 2/n\cdot(4\cdot n - (2/n)^2 \cdot (1+2^2+\ldots+(n-1)^2))$

$= 2/n \cdot 4n - (2/n) \cdot (2/n)^2 \cdot (1+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)$

$= 8 - (2/n)^3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$

$= 8 - \frac{8\cdot n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{6n^3} = 8 - \frac{4\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{3n^2}$

Stellen für Untersumme: $2/n, 2\cdot 2/n, 3\cdot 2/n, \ldots, n\cdot 2/n$

$U_n = 2/n\cdot (f(2/n) + f(2\cdot 2/n) + f(3\cdot 2/n) + \ldots + f(n\cdot 2/n))$

$= 2/n\cdot(-(2/n)^2 + 4 -(2\cdot 2/n)^2 + 4 - (3\cdot 2/n)^2 + 4 \pm \ldots - (n\cdot 2/n)^2 + 4)$

$= 2/n\cdot(4+4+4+\ldots+4 - (2/n)^2 - (2/n)^2 \cdot 2^2 - (2/n)^2 \cdot 3^2 - \ldots - (2/n)^2 \cdot n^2)$

$= 2/n\cdot(4\cdot n - (2/n)^2 - (2/n)^2 \cdot 2^2 -(2/n)^2 \cdot 3^2- \ldots - (2/n)^2 \cdot n^2)$

$= 2/n \cdot 4n - 2/n \cdot ((2/n)^2 + (2/n)^2 \cdot 2^2 + (2/n)^2 \cdot 3^2+ \ldots +(2/n)^2 \cdot n^2)$

$= 8 - 2/n \cdot (2/n)^2 \cdot (1+2^2+3^2+\ldots+n^2)$

$= 8 - (2/n)^3 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

$= 8 - \frac{8 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$

$= 8 - \frac{4 \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2}$

Grenzübergang $n \to \infty$:

$On = 8 - \frac{4 \cdot (n-1) \cdot (2n-1)}{3n^2} = 8 - \frac{4 \cdot (2n^2 - 3n + 1)}{3n^2}$

$= 8 - \frac{8n^2 - 12n + 4}{3n^2} = 8 - \frac{8n^2}{3n^2} + \frac{12n}{3n^2} - \frac{4}{3n^2}$

$= 8 - \frac{8}{3} + \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$

$= \frac{16}{3} + \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$

$$\lim_{n \to \infty} O_n = 16/3$$

$U_n = 8 - \frac{4 \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{3n^2} = 8 - \frac{4 \cdot (2n^2 + 3n + 1)}{3n^2}$

$= 8 - \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2}$

$= 8 - \frac{8n^2}{3n^2} - \frac{12n}{3n^2} - \frac{4}{3n^2}$

$= 8 - \frac{8}{3} - \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$

$= \frac{16}{3} - \frac{4}{n} - \frac{4}{3n^2}$

$$\lim_{n \to \infty} U_n = 16/3$$