Verschiedene Typen von Exponentialgleichungen lösen

Im Folgenden wird gezeigt, wie verschiedene Typen von Exponentialgleichungen gelöst werden können. Solche Gleichungen können im Zusammenhang mit der Berechnung von Nullstellen oder Extremstellen/Wendestellen bei Exponentialfunktionen auftreten.

Beispiel 1: $4e^{2x} = 16$

$4e^{2x} = 16 \quad | :4 \qquad$ (es wird erst e^{2x} isoliert)
$e^{2x} = 4 \quad | \ln(\ )$
$2x = \ln(4) \quad | :2$

$x = \ln(4)/2$

Bemerkungen:
1) Wenn hier $e^x = -10$ gestanden hätte, gäbe es keine Lösung ($\ln(a)$ existiert im Reellen nur für $a > 0$). e^x ist für reelle x immer positiv und somit gibt es kein reelles x, so dass z.B. $e^x = -10$ gilt. Damit hat $e^x + 10 = 0$ keine Lösung, aber $-e^x + 10 = 0$ ($\Leftrightarrow -e^x = -10 \Leftrightarrow e^x = 10$).

2) Falls es möglich ist, versucht man immer $e^{\dots}$ zu isolieren.

Beispiel 2: $4e^{2x} - e^{5x} = 0$

$4e^{2x} - e^{5x} = 0 \quad | +e^{5x}$
$4e^{2x} = e^{5x} \quad | :e^{2x} \qquad$ ($e^a/e^b = e^{a-b}$, womit $e^{5x}/e^{2x} = e^{3x}$)
$4 = e^{3x} \quad | \ln(\ )$
$\ln(4) = 3x \quad | :3$

$x = \ln(4)/3$

Bemerkung:
Im Beispiel 2 könnte man auch ausklammern:

$4e^{2x} - e^{5x} = 0$
$e^{2x} \cdot \left(4 \cdot \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - \frac{e^{5x}}{e^{2x}}\right) = 0$
$e^{2x} \cdot (4 - e^{3x}) = 0$

Also ist $e^{2x} = 0$ oder $4 - e^{3x} = 0$.

$e^{2x} = 0$ hat keine Lösung!

$4 - e^{3x} = 0 \quad | + e^{3x}$
$4 = e^{3x} \quad | \ln(\ )$
$\ln(4) = 3x \quad | :3$

$x = \ln(4)/3$

Beispiel 3: $(2x-5)\,e^{-4x} = 0$

$(2x-5)\,e^{-4x} = 0$
$2x-5 = 0$ oder $e^{-4x} = 0$

e^{-4x} hat keine Nullstelle.

$2x - 5 = 0 \quad |+5$
$2x = 5 \quad |:2$
$x = 2{,}5$

Beispiel 4: $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

$e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

Dies ist ein Fall für eine Substitution:
Da $(e^x)^2 = e^{2x}$ gilt (denn $(a^n)^m = a^{nm}$), kann man

$z = e^x \quad (*)$

substituiert, womit $e^{2x} = z^2$ ist.
Damit erhalten wir:

$z^2 - 5z + 4 = 0$

Hier können wir einfach die p – q – Formel anwenden:

$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$
$z_{1/2} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$z_1 = 4$
$z_2 = 1$

Nun muss zurücksubstituiert werden. Dazu setzen wir in die Gleichung (*), die wir beim Substituieren verwendet haben, für z die Werte z_1 und z_2 ein oder wir könnten auch direkt die Zurücksubstitution mit $x = \ln(z)$ durchführen.

$z = e^x$

$4 = e^x \quad |\ln(\ )$

$\Rightarrow x_1 = \ln(4)$

Aus $1 = e^x$ ergibt sich dann $x_2 = \ln(1) = 0$.

Wir haben als zwei Lösungen für x gefunden: $x_1 = \ln(4)$ und $x_2 = 0$

Bemerkungen:

1) Allgemein gilt $z = e^x \Leftrightarrow x = \ln(z)$ für positive z. Damit können über $x_{1/2} = \ln(z_{1/2})$ die beiden Lösungen für x (d.h. x_1 und x_2) direkt mit z_1 und z_2 bestimmt werden, wenn die Werte für z beide positiv sind. Sind beide nicht positiv (also negativ oder gleich 0), so gibt es keine Lösung für die Originalgleichung bezüglich x. Dies ist beispielsweise bei $z_1 = 0$ und $z_2 = -4$ (was sich bei der Gleichung $e^{2x} + 4e^x = 0$ ergeben würde) der Fall oder bei $z_1 = -1$ und $z_2 = -3$ (was sich mit der Gleichung $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$ ergeben würde). Wenn nur genau ein Wert für z positiv wäre, gäbe es bei der Originalgleichung nur eine Lösung, was beispielsweise bei der Gleichung $e^{2x} - 5e^x - 24 = 0$ der Fall wär, wo sich $z_1 = 8$ und $z_2 = -3$ ergibt. Hier wäre dann nur $x = \ln(8)$ eine Lösung.

2) Substituiert könnte man auch im Fall

$e^{4x} - 5e^{2x} + 4 = 0$ (hier $z = e^{2x}$, womit $z^2 = e^{4x}$ ist)

oder bei

$e^{6x} - 5e^{3x} + 4 = 0$ (hier $z = e^{3x}$, womit $z^2 = e^{6x}$ ist).

Dies geht allgemein bei Gleichungen des Typs $e^{2a\cdot x} + p\cdot e^{a\cdot x} + q = 0$ mit $a \neq 0$.

3) Die Gleichung aus Bespiel 4 hätte auch so aussehen können:
$e^x + 4e^{-x} - 5 = 0$

Multipliziert man hier mit e^x (wegen $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$), so ergibt sich:

$e^{2x} + 4 - 5e^x = 0$

Beispiel 4: $\frac{e^{-2x} - 4}{e^{3x} + 5} = 0$

$$\frac{e^{-2x} - 4}{e^{3x} + 5} = 0$$

Hier müsste man erst den Definitionsbereich festlegen und die Nullstellen es Nenners ausschließen. $e^{3x} + 5 = 0$ hat aber keine Lösung, womit der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ wäre und jede reelle Zahl als Lösung der oberen Gleichung zulässig wäre.

$e^{-2x} - 4 = 0 \quad | +4$
$e^{-2x} = 4 \quad | \ln(\,)$
$-2x = \ln(4) \quad | :(-2)$

$x = -\ln(4)/2$

Bemerkung:

Es gibt auch Exponentialgleichungen, die nicht durch einfaches Umformen gelöst werden können, wie beispielsweise die Gleichung $x \cdot e^{2x} - 10 + e^{3x} = 0$. Hier müsste ein nummerischen Verfahren (z.B. das Newton-Verfahren) verwendet werden.