Bruchgleichungen

Bei einer Bruchgleichung steht die Unbekannte im Nenner eines Bruches. Beispielsweise:

$$\frac{12}{x} = 3$$

Bei Bruchgleichungen legt man zunächst den Definitionsbereich fest. Es sind alle reellen Zahlen (oder rationalen Zahlen, je nachdem von welcher Grundmenge man ausgeht) als Lösung möglich, außer die, bei denen der Nenner Null werden würde. Dies wäre hier die 0. Somit ist der Definitionsbereich bekannt:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (\text{oder } \mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{0\})$$

Im Folgenden gehen wir immer von den reellen Zahlen als Grundmenge aus. Lösen können wir die obige Bruchgleichung, wenn wir diese (d.h. beide Seiten der Gleichung) mit dem Nenner multiplizieren, also mit x:

$$\frac{12}{x} = 3 \quad | \cdot x$$

$$12 = 3x \quad | :3$$

$$x = 4$$

Nun liegt 4 im Definitionsbereich und ist somit eine Lösung der obigen Gleichung:

$$\mathbb{L} = \{4\}$$

Weitere **Beispiele**:

$$\frac{6}{x+1} = 2$$

Der Nenner wird gleich Null, wenn $x + 1 = 0$ ist bzw. wenn $x = -1$ ist: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{6}{x+1} = 2 \quad | \cdot(x + 1)$$

$$6 = 2(x + 1)$$

$$6 = 2x + 2 \quad | -2$$

$$4 = 2x \quad | :2$$

$$x = 2$$

$$\mathbb{L} = \{2\}$$

$$\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}=3$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$\frac{4}{x+1}+\frac{4}{x-1}=3 \quad |\cdot(x + 1)(x - 1)$$

Wir erhalten:

$$\frac{4}{x+1}\cdot(x+1)(x-1)+\frac{4}{x-1}\cdot(x+1)(x-1)=3\cdot(x+1)(x-1)$$

Jetzt kürzt sich jeweils der Nenner heraus:

$$4(x - 1) + 4(x + 1) = 3(x^2 – 1)$$

$$8x = 3x^2 – 3 \quad | - 8x$$

$$3x^2 – 8x – 3 = 0 \quad | :3$$

$$x^2 – 8/3x – 1 = 0$$

Nun können wir die p-q-Formel anwenden:

$$x_{1/2} = 4/3 \pm \sqrt{16/9+1}$$
$$4/3 \pm 5/3$$

Also ist $x_1 = 3$ und $x_2 = -1/3$.

$$\mathbb{L} = \{-1/3; 3\}$$

Es folgt noch ein letztes Beispiel:

$$\frac{3}{2x+4}-\frac{1}{x-2}=\frac{-3}{x^2-4}$$

Der Definitionsbereich wird bestimmt, indem wieder geprüft wird, für welche x die Nenner gleich Null werden:

$2x + 4 = 0$ ergibt $x = -2$.
$x – 2 = 0$ ergibt $x = 2$.
$x^2 – 4 = 0$ ergibt $x = 2$ oder $x = -2$.

Nun ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. Im ersten Nenner (von links) kann man auch 2(x + 2) und in dem Nenner auf der rechten Seite kann man auch (x – 2)(x + 2) schreiben (Anwendung der binomische Formel, bzw. Darstellung als Linearfaktoren – siehe Bemerkung 2 unten). Dadurch kann man die Gleichung mit 2(x – 2)(x + 2) multiplizieren, was dem Hauptnenner entspricht:

$$\frac{3}{2(x+2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{-3}{(x-2)(x+2)} \quad | \cdot 2(x-2)(x+2)$$

$$3(x-2) - 1 \cdot 2(x+2) = -3 \cdot 2$$

$$x - 10 = -6 \quad | +10$$

$$x = 4$$

Also $\mathbb{L} = \{4\}$.

Bemerkungen:

1) Hätte der zweite Bruch auf der linken Seite der Gleichung die Form $\frac{1}{2-x}$ gehabt, so hätte man ihn mit (-1) erweitern können und hätten $\frac{-1}{x-2}$ erhalten.

2) Liegen beispielsweise zwei Nullstellen x_1 und x_2 vor, so kann man die Gleichung (d.h. beide Seiten der Gleichung) mit $(x - x_1)(x - x_2)$ multiplizieren. Im Beispiel oben hätte somit auch der Faktor (x – 2)(x + 2) genügt.

Aufgaben:

a)

$$\frac{8}{x-3} = 4$$

b)

$$\frac{5}{x+3} = \frac{8}{x+6}$$

c)

$$\frac{4}{x+2} = x - 1$$

d)

$$\frac{4}{x+2} + \frac{3}{x+1} = 2$$

e)

$$\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1} = \frac{16}{x^2-1}$$

Definitionsbereiche und Lösungen:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$; $\mathbb{L} = \{5\}$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-6; -3\}$; $\mathbb{L} = \{2\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $\mathbb{L} = \{-3; 2\}$

d) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$; $\mathbb{L} = \{-3/2; 2\}$

e) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$; $\mathbb{L} = \{3\}$