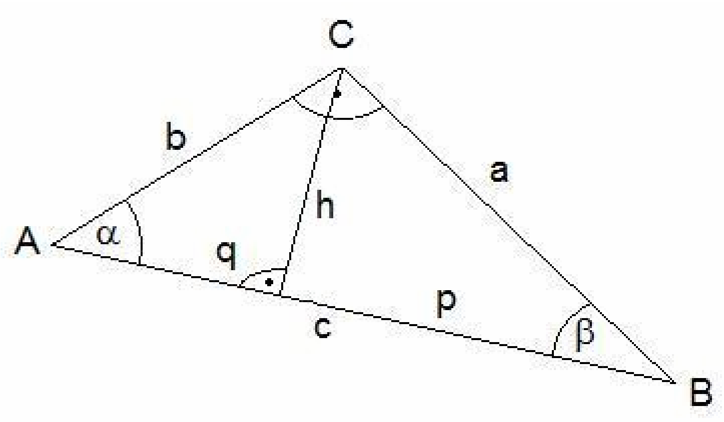
Höhensatz und Kathetensatz von Euklid



Im Folgenden sei $\gamma = 90°$. h ist die Höhe auf c (d.h. $h = h_c$). Die Höhe teilt die Hypotenuse in zwei Stücke, wobei das unter der Kathete a mit p und das unter der Kathete b mit q bezeichnet wird (siehe obere Grafik).

Nun gilt der Höhensatz von Euklid

$$h^2 = p \cdot q \quad ,$$

sowie der Kathetensatz von Euklid:

$$a^2 = c \cdot p \text{ und } b^2 = c \cdot q$$

Es gilt natürlich $c = p + q$. Außerdem könnte man dreimal den Satz von Pythagoras anwenden:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = p^2 + h^2$$

$$b^2 = q^2 + h^2$$

Beispiele:
Es sei a = 8cm und c = 10cm. Gesucht sind alle fehlenden Teile (b, p, q und h):

Wie müssen eine Formel verwenden, bei der nur eine Unbekannte vorkommen würde, z.B. Pythagoras (im großen Dreieck) oder den Kathetensatz $a^2 = c \cdot p$. Wir setzen in den Kathetensatz ein:

$$a^2 = c \cdot p$$

$$(8\text{cm})^2 = 10\text{cm} \cdot p$$

$$64\text{cm}^2 = 10\text{cm} \cdot p \quad |:10\text{cm}$$

$$p = 6{,}4\text{cm}$$

Mit p und c kann man immer q berechnen:

$$c = p + q$$

$$10cm = 6{,}4cm + q \quad | -6cm$$

$$q = 3{,}6cm$$

Nun können wir mit dem Höhensatz b berechnen:

$$b^2 = c \cdot q$$

$$b^2 = 10cm \cdot 3{,}6cm$$

$$b^2 = 36cm \quad | \sqrt{}$$

$$b = 6cm$$

Zuletzt bestimmen wir noch h mit dem Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h^2 = 6{,}4cm \cdot 3{,}6cm$$

$$h^2 = 23{,}04cm^2 \quad | \sqrt{}$$

$$h = 4{,}8cm$$

Bemerkung:
Wie man sieht, muss man sich immer nur eine Gleichung heraussuchen, bei der 2 Größen bekannt sind bzw. nur eine unbekannt ist. Es gibt aber auch „Spezialfälle“, bei denen dies nicht geht. Beispielsweise wenn p = 6cm und b = 4cm wäre. Hier müsste man zwei Gleichungen aufstellen (wir rechnen hier der Einfachheit halber ohne Einheiten):

$$a^2 = c \cdot p$$

$$a^2 = 6c \qquad (*)$$

Nun benötigen wir noch eine Gleichung, wo nur a und c fehlt:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + 4^2$$

Nun setzen wir (*) in die obige Gleichung ein:

$$c^2 = 6c + 16$$

Wir bringen „alles auf eine Seite“:

$$c^2 - 6c - 16 = 0$$

Nun können wir die p-q-Formel für quadratische Gleichungen anwenden:

$$c_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9+16}$$

Also ist $c_1 = 8$ und $c_2 = -2$, womit c gleich 8cm lang ist.

Damit erhalten wir alle anderen Größen:

$$q = c - p = 8\text{cm} - 6\text{cm} = 2\text{cm}$$

$$a^2 = c \cdot p$$

$$a^2 = 8\text{cm} \cdot 6\text{cm}$$

$$a^2 = 48\text{cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$a \approx 6{,}93\text{cm}$$

$$h^2 = p \cdot q$$

$$h^2 = 6\text{cm} \cdot 2\text{cm}$$

$$h^2 = 12\text{cm}^2 \quad | \sqrt{}$$

$$h \approx 3{,}46\text{cm}$$

Aufgaben:
Bestimme alle fehlenden Größen:
a) $p = 9\text{cm}$, $q = 4\text{cm}$
b) $a = 9\text{m}$, $c = 15\text{m}$
c) $p = 2\text{cm}$, $c = 10\text{cm}$
d) $a = 5\text{dm}$, $b = 8\text{dm}$

Lösungen:
a) $h = 6\text{cm}$, $c = 13\text{cm}$, $a \approx 10{,}82\text{cm}$, $b \approx 7{,}21\text{cm}$
b) $b = 12\text{m}$, $h = 7{,}2\text{m}$, $p = 5{,}4\text{m}$, $q = 9{,}6\text{m}$
c) $q = 8\text{cm}$, $a \approx 4{,}47\text{cm}$, $b \approx 8{,}94\text{cm}$, $h = 4\text{cm}$
d) $c \approx 9{,}43\text{dm}$, $h \approx 4{,}24\text{dm}$, $p \approx 2{,}65\text{dm}$, $q \approx 6{,}78\text{dm}$