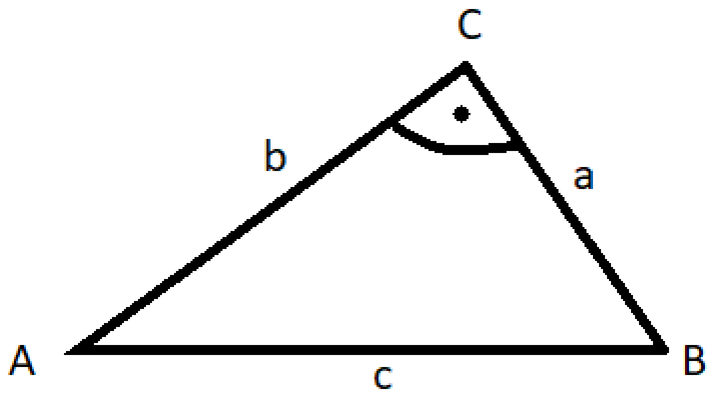
Pythagoras

Kommen wir als nächstes zum Satz von Pythagoras. Dieser gilt in rechtwinkligen Dreiecken, d.h. in Dreiecken, bei denen einer der Winkel gleich 90° beträgt. Wenn $\gamma = 90°$ ist, so würde der Satz des Pythagoras wie folgt lauten:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Die Seite gegenüber dem rechten Winkel heißt Hypotenuse. Wenn $\gamma = 90°$ ist, ist c die Hypotenuse. Die anderen beiden Seiten heißen Katheten. Wenn $\gamma = 90°$ ist, wären die Seiten a und b die Katheten. Allgemein sagt der Satz von Pythagoras, dass das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Katheten ist. Wenn $\alpha = 90°$ wäre, würde dann $a^2 = b^2 + c^2$ gelten, da dann a die Hypotenuse wäre. Die Hypotenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck.

Sind nun in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt, so kann die dritte berechnet werden.

Beispiele:
Es sei $\gamma = 90°$, a = 3cm und b = 4cm.

Wir rechnen erst mal ohne Einheiten:

$a^2 + b^2 = c^2$

$3^2 + 4^2 = c^2$

$9 + 16 = c^2$

$25 = c^2 \quad | \sqrt{\ }$

$c = 5$

Also ist c = 5cm.

Wir rechnen noch mal mit Einheiten:

$a^2 + b^2 = c^2$

$(3cm)^2 + (4cm)^2 = c^2$

$9cm^2 + 16cm^2 = c^2$

$25cm^2 = c^2 \quad | \sqrt{\ }$

$c = 5cm$ (Hier benötigen wir nur die positive Lösung, da es sich um Dreiecksseiten handelt.)

Es sei $\gamma = 90°$, $c = 13cm$ und $b = 12cm$.

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + (12cm)^2 = (13cm)^2$

$a^2 + 144cm^2 = 169cm^2 \quad | -144cm^2$

$a^2 = 25cm^2 \quad | \sqrt{\ }$

$a = 5cm$

Allgemein gilt, wenn c die Hypotenuse ist:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

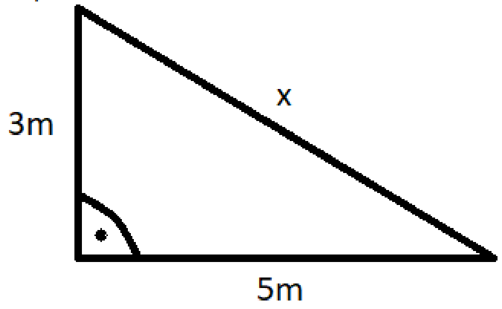
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Auf den nächsten Seiten folgen Aufgaben mit Lösungen.

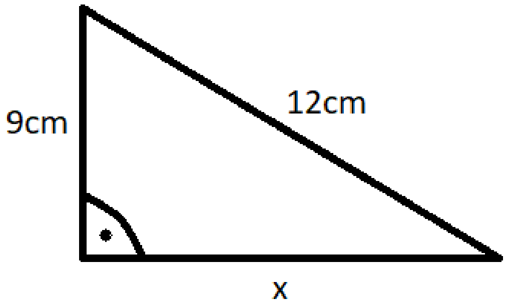
Aufgaben:

1)

a)



b)



2)

a) $\gamma = 90°$, a = 8m und b = 6m.
b) $\gamma = 90°$, a = 2dm und c = 5dm.
c) $\beta = 90°$, a = 3cm und c = 6cm.
d) $\alpha = 90°$, a = 1,3m und b = 1,2m.

3)

a) Wie groß ist die Diagonale in einem Quadrat mit der Katenlänge 10cm?
b) Wie groß ist die Diagonale eines Monitors der 40cm breit und 30cm hoch ist?
c) Eine 10m lange Leiter wird an eine Wand gelehnt. Sie soll auf dem Boden einen Abstand von 3m von der Wand haben. Wie hoch kommt man mit dieser Leiter?
d) Ein gleichseitiges Dreieck hat eine Seitenlänge von 6cm. Wie groß ist die Höhe?

Lösungen:

1) a) Die Hypotenuse ist x. Die beiden Katheten sind 3m und 5m lang. Wir rechnen ohne Einheiten:

$$\begin{aligned} x^2 &= 3^2 + 5^2 \\ x^2 &= 34 \quad | \sqrt{\ } \\ x &\approx 5{,}38 \end{aligned}$$

Damit ist x ca. 5,38m lang.

a) Die Hypotenuse ist 12cm lang. Eine Kathete ist 9cm lang und die andere wird gesucht (x). Wir rechnen ohne Einheiten:

$$\begin{aligned} 12^2 &= x^2 + 9^2 \quad | -9^2 \\ 63 &= x^2 \quad | \sqrt{\ } \\ x &\approx 7{,}94 \end{aligned}$$

Damit ist x ca. 7,94cm lang.

Also nochmal zusammengefasst: Wie zu sehen ist, muss nur die Hypotenuse erkannt werden (als Seite gegenüber der Ecke mit dem rechten Winkel). Wenn die Gleichung des Pythagoras aufgestellt wird, steht deren Länge zum Quadrat dann alleine auf einer Seite, auf der anderen steht dann immer die Summe der beiden Quadrate von den Längen der Katheten. Wenn $\alpha = 90°$ beträgt, dann ist a die Hypotenuse und wenn $\beta = 90°$ ist, ist b die Hypotenuse. Am bekanntesten ist die Gleichung für $\gamma = 90°$, wo c die Hypotenuse ist.

2)

a) $c = 10m$ (c ist die Hypotenuse: $c^2 = a^2 + b^2$)

b) $b \approx 4{,}58dm$ (c ist die Hypotenuse: $c^2 = a^2 + b^2$)

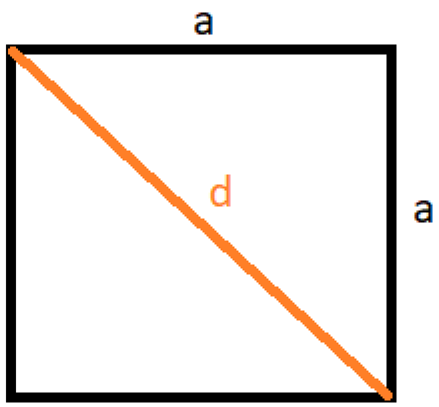
c) $b \approx 6{,}71cm$ (b ist die Hypotenuse: $b^2 = a^2 + c^2$)

d) $c = 0{,}5m$ (a ist die Hypotenuse: $a^2 = b^2 + c^2$)

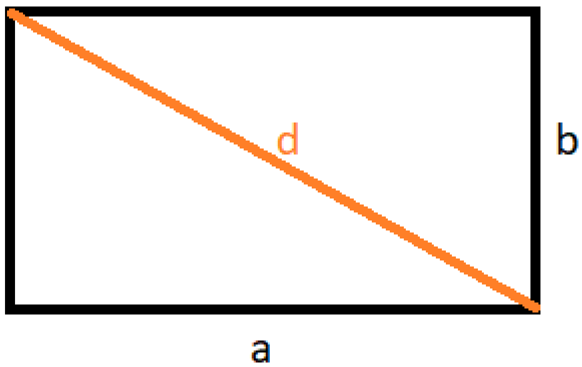
3)
a) $d^2 = a^2 + a^2$. Dies ergibt $d \approx 14{,}14cm$. Man kann auch direkt eine Formel für die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge a aufstellen:

$$d^2 = 2a^2 \quad | \sqrt{}$$

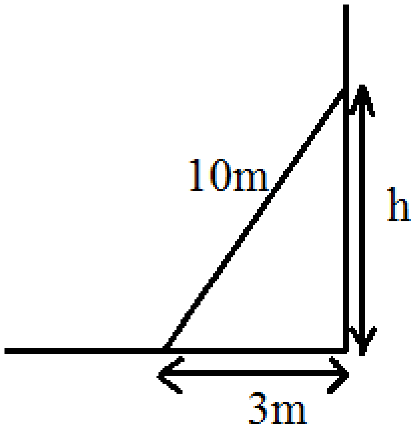
$$d = \sqrt{2} \cdot a$$



b) $d^2 = a^2 + b^2$. Dies ergibt $d = 50cm$.



c) Die Leiter ist die Hypotenuse (siehe Skizze).



Somit gilt:

$$(10\text{m})^2 = (3\text{m})^2 + h^2$$

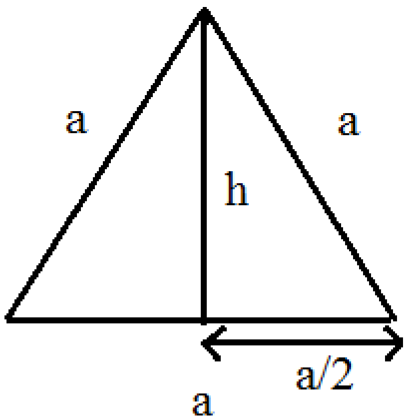
Damit ergibt sich: h $\approx 9{,}54$m

d) Wenn a die Seitenlänge ist, so gilt für die Höhe h:

$$a^2 = (a/2)^2 + h^2$$

$$(6\text{cm})^2 = (3\text{cm})^2 + h^2$$

Damit ergibt sich: h $\approx 5{,}20$cm



Man kann hier auch eine Formel für die Höhe h in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a aufstellen:

$$a^2 = (a/2)^2 + h^2$$

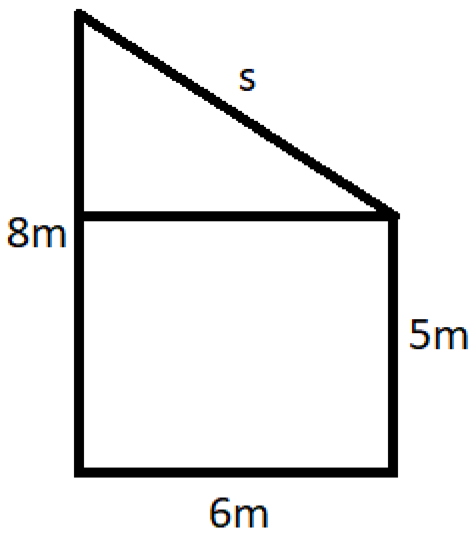
$$a^2 = 1/4a^2 + h^2 \quad | -1/4a^2$$

$$3/4a^2 = h^2 \quad | \sqrt{}$$

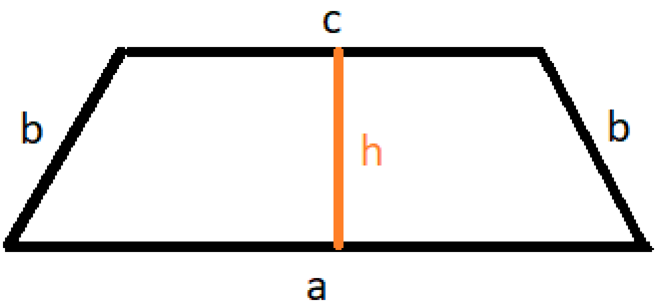
$$h = \sqrt{3}/2 \cdot a$$

Weitere Aufgaben:

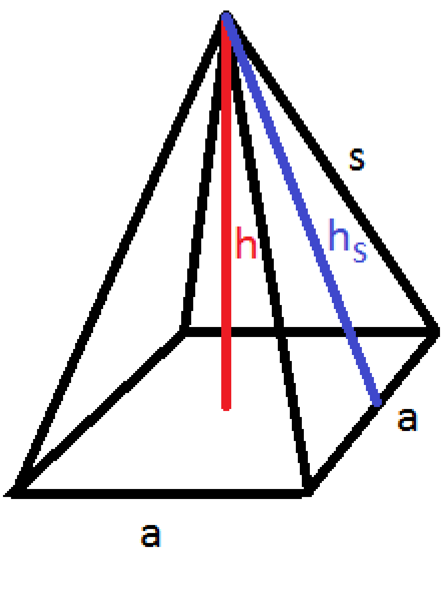
1) Gesucht wird die Länge von s:



2) Wie groß ist b, wenn a = 10cm, c = 8cm und h = 5cm ist?

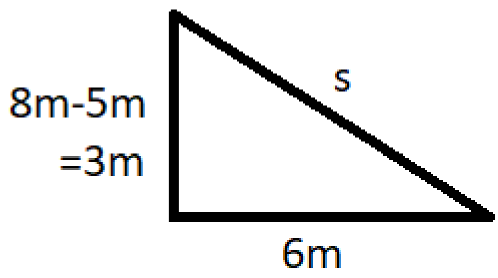


3) Unten ist eine Pyramide mit Quadratischer Grundfläche zu sehen. Wie groß ist die Seitenhöhe h_s und die Länge der Seitenkante s, wenn a = 10cm und h = 12cm beträgt?



Lösungen:

1) Wir können in dem oberen Dreieck der Abbildung die Kathete, die links unten im Bild zu sehen ist, mit 8m – 5m = 3m berechnen.

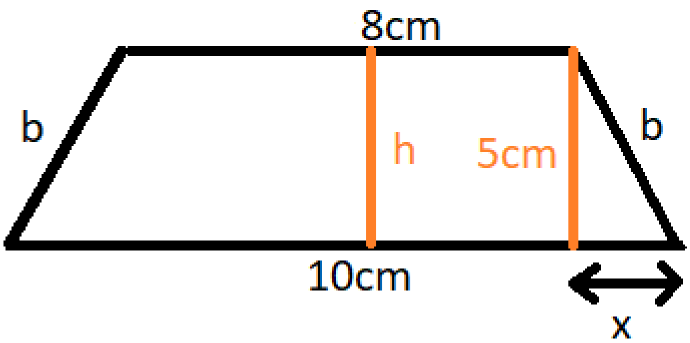


Nun können wir Pythagoras anwenden, wobei Hypotenusenlänge s gesucht wird.
Wir rechnen ohne Einheiten:

$$s^2 = 3^2 + 6^2$$
$$s^2 = 45 \qquad | \sqrt{}$$
$$s \approx 6{,}71$$

Damit ist s ca. 6,71m lang.

2)

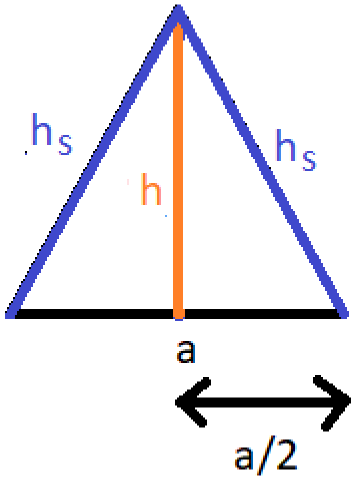


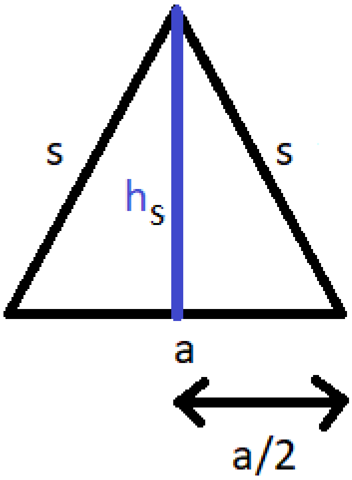
Wir können x berechnen, denn 10cm – 8cm = 2x, womit x = 1cm lang ist. Dies gilt, da das Trapez achsensymmetrisch ist. Allgemein ist x = (a-c)/2 bei solchen Trapezen. Nun haben wir die Längen zweier Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck und können die Länge der Hypotenuse b berechnen:

$$b^2 = 5^2 + 1^2$$
$$b^2 = 26 \qquad | \sqrt{}$$
$$b \approx 5{,}10$$

Damit ist b ca. 5,1 cm lang.

3) Wenn die Pyramide in der Mitte durch die Spitze und durch zwei gegenüberliegende Seitenhöhen geteilt wird, dann ergibt sich das linke gleichschenklige Dreieck unten. Betrachtet wir eine Seite, dann sehen wir - wie rechts unten in der Abbildung - nochmal ein gleichschenkliges Dreieck. Bei gleichschenkligen Dreiecken teilt die Höhe die Basis (hier a) immer in zwei gleich große Teile, womit wir mit der Höhe des Dreiecks, mit der Hälfte der Basis und einem Schenkel als Hypotenuse jeweils ein rechtwinkliges Dreieck erhalten.





In unserer Pyramide ist a = 10cm und h = 12cm. Wir können zunächst die Seitenhöhe h_s berechnen. Wir rechnen ohne Einheiten:

$$h_s^2 = h^2 + (a/2)^2$$
$$h_s^2 = 12^2 + (10/2)^2$$
$$h_s^2 = 169 \qquad | \sqrt{}$$
$$h_s^2 = 13$$

Damit ist die Höhe einer Seite 13cm lang. Nun können wir mit der Seitenhöhe die Seitenkante berechnen.

$$s^2 = h_s^2 + (a/2)^2$$
$$s^2 = 13^2 + (10/2)^2$$
$$s^2 = 194 \qquad | \sqrt{}$$
$$s \approx 13{,}93$$

Damit ist diese ca. 13,93cm lang.

Mit der Höhe h und der Grundkante a der Pyramide könnte die Seitenkante s auch auf eine andere Art bestimmt werden, wenn zuvor die Diagonale d der Grundseite berechnet wird, für die gilt $d^2 = a^2 + a^2$, womit $d = \sqrt{2} \cdot a$ ist. d bildet mit den beiden Seitenkannten s auch ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe die Pyramidenhöhe h ist, womit $s^2 = h^2 + (d/2)^2$ gilt.