Wurzelgesetze

(1) $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

Beispiele:

$\sqrt{a} = a^{1/2}$ (Es gilt: $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$)

$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

(2) $\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$

Beispiele:

$\sqrt[5]{x^{10}} = x^{10/5} = x^2$

$a^{0,75} = a^{75/100} = a^{3/4} = \sqrt[4]{a^3}$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{1/2} \cdot x^{1/4} = x^{1/2+1/4} = x^{3/4} = \sqrt[4]{x^3}$

(3) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ bzw. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Beispiele:

$\sqrt[3]{8x^7} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^7} = 2 \cdot \sqrt[3]{x^7}$

$\sqrt[4]{\frac{a}{16}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{2}$

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$

Teilweises Wurzelziehen:
Die Formel (3) wird auch bei dem so genannten teilweisen Wurzelziehen angewandt:

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

Beim teilweisen Wurzelziehen prüft man zunächst, wie man oben sieht (und wie auch im Kapitel Wurzeln beschrieben), welche Quadratzahl Teiler des Radikanten (dieser steht unter der Wurzel) ist und zerlegt dann den Radikanten in Faktoren.

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Beispiel:

$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$

Bemerkung zur einschränkenden Bedingung:
Bei einigen Aufgabenstellungen im Rahmen der Anwendung der Wurzelgesetze kann zusätzlich nach einer einschränkenden Bedingung gefragt werden.

Z.B. gilt $\sqrt[4]{x^4} = x$ nur für $x \geq 0$, denn falls x negativ wäre, gilt das Gleichheitszeichen nicht mehr. Beispielsweise würde für x = -1 auf der linken Seite der Gleichung $\sqrt[4]{(-1)^4}$ stehen, was gleich 1 ist und rechts würde -1 stehen, also ein Widerspruch. Somit muss man als Einschränkung $x \geq 0$ angeben oder man schreibt $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ und verwendet den Betrag. Die Gleichung $\sqrt[2]{x^4} = x^2$ gilt für alle reellen Zahlen x, man benötigt hier keine Einschränkung. Dies gilt auch für $\sqrt[3]{x^9} = x^3$.

Aufgaben:
1) Schreibe mit Wurzel:
$x^{1/3}$, $a^{1/9}$, $b^{4/5}$, $c^{0,25}$

2) Schreibe ohne Wurzel (mit gebrochenem Exponenten):
$\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[3]{x^9}$, $\sqrt[5]{x^2}$

3) Ziehe teilweise die Wurzel (so weit wie möglich):
$\sqrt{32}$, $\sqrt{75}$, $\sqrt{0{,}12}$, $\sqrt{50000}$, $\sqrt{45} + \sqrt{20}$, $\sqrt{\frac{9}{2}}$, $\sqrt[3]{10 \cdot a^{12}}$, $\sqrt{x^5 \cdot y^7}$, $\sqrt[3]{a^{18} \cdot b^{10}}$

Lösungen:
1) Mit Wurzel:
$\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[9]{a}$, $\sqrt[5]{b^4}$, $\sqrt[4]{c}$

2) Ohne Wurzel:
$x^{1/4}$, $x^{9/3} = x^3$, $x^{2/5}$

3) Teilweises Wurzelziehen:
$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2}$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{0{,}12} = \sqrt{0{,}04 \cdot 3} = \sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{3} = 0{,}2 \cdot \sqrt{3}$$

$$\sqrt{50000} = \sqrt{10000 \cdot 5} = \sqrt{10000} \cdot \sqrt{5} = 100 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{45} + \sqrt{20} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{4 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[3]{10 \cdot a^{12}} = \sqrt[3]{10} \cdot a^4$$

$$\sqrt{x^5 \cdot y^7} = \sqrt{x^4 \cdot x \cdot y^6 \cdot y} = x^2 \cdot y^3 \cdot \sqrt{x \cdot y}$$

$$\sqrt[3]{a^{18} \cdot b^{10}} = \sqrt[3]{a^{18} \cdot b^9 \cdot b} = a^6 \cdot b^3 \cdot \sqrt[3]{b}$$

Wie man sieht, sollte bei der dritten Wurzel der Exponent durch drei teilbar sein.

Bemerkung:
Lösung einer Gleichung der Form $x^n = a$ (mit $x \in \mathbb{R}$):

$$x^2 = 16 \mid \sqrt{}$$

$x = 4$ oder $x = -4$ (also $x_1 = 4$ und $x_2 = -4$), denn $4^2 = 16$ und $(-4)^2 = 16$.

Also sieht man, dass falls $a > 0$ und n gerade ist, zwei Lösungen existieren. Wenn $a = 0$ ist, existiert nur eine Lösung ($x = 0$) und wenn $a < 0$ wäre, ergäbe sich keine Lösung:

$x^4 = -8$ hätte keine Lösung.

Weitere **Beispiele**:

$$x^4 = 16 \mid \sqrt[4]{}$$

$x = 2$ oder $x = -2$.

$$x^3 = 8 \mid \sqrt[3]{}$$

$x = 2$

Hier gibt es nur eine Lösung, denn $(-2)^3 = -8$.

Somit hätte die Gleichung $x^3 = -8$ die Lösung $x = -2$. Die Gleichung $x^n = a$ hat für ungerades n also immer genau eine Lösung, selbst wenn a negativ ist.

Aufgaben:

a) $x^3 = -1000$

b) $x^4 = 81$

c) $2x^4 + 3 = 35$

d) $x^6 = -1$

e) $x^{2/3} = 4$

Lösungen:

a) $x^3 = -1000 \mid \sqrt[3]{}$

$$x = \sqrt[3]{-1000} = -10$$

b) $x^4 = 81 \mid \sqrt[4]{}$

$$x = \pm\sqrt[4]{81}$$

Somit ist $x = 3$ oder $x = -3$, bzw. $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$.

c) $2x^4 + 3 = 35 \mid -3$

$$2x^4 = 32 \mid :2$$

$$x^4 = 16 \mid \sqrt[4]{}$$

Somit ist $x = 2$ oder $x = -2$, bzw. $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.

d) $x^6 = -1 \mid \sqrt[6]{}$

Keine Lösung!

e) $x^{3/5} = 8 \mid (\,)^{5/3}$

$$x = 8^{5/3} = \sqrt[3]{8^5} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 32$$