Wurzelgleichungen

Bei einer Wurzelgleichung steht die Unbekannte unter einer Wurzel. Beispielsweise wäre

$$\sqrt{x} = 4$$

eine Wurzelgleichung. Zum Lösen sollte man immer zunächst versuchen, die Wurzel zu isolieren, damit diese alleine auf einer Seite steht. Dies ist beim oberen Beispiel schon der Fall. Danach quadriert man beide Seiten:

$$\sqrt{x} = 4 \quad | \,()^2$$

$$x = 16$$

Das Quadrieren ist aber keine Äquivalenzumformung, d.h. die Lösungsmenge ist nach dem Quadrieren nicht unbedingt mehr die gleiche wie vor dem Quadrieren, weshalb man bei Wurzelgleichungen immer eine Probe machen muss, bevor man die Lösungsmange angibt. Würde man z.B. $x = 4$ auf beiden Seiten quadrieren, so würde sich $x^2 = 16$ ergeben. Diese neue Gleichung hat nun aber 2 Lösungen, nämlich 4 und -4. Weiteres **Beispiel**:

$$\sqrt{x} = -4 \quad | \,()^2$$

$$x = 16$$

Probe (dazu setzt man $x = 16$ in die ursprüngliche Gleichung ein):

$$\sqrt{16} \stackrel{?}{=} -4$$

Dies ist ein Widerspruch, denn die Wurzel aus 16 ist 4. Damit wäre die Lösungsmenge leer: $\mathbb{L} = \{\}$.

Weitere **Beispiele**:

$$\sqrt{x+2} - 1 = 2$$

Zunächst isolieren wir die Wurzel, bevor wir quadrieren:

$$\sqrt{x+2} - 1 = 2 \quad | +1$$

$$\sqrt{x+2} = 3 \quad | \,()^2$$

$$x + 2 = 9 \quad | -2$$

$$x = 7$$

Probe: $\sqrt{7+2}-1\overset{?}{=}2$

$3 - 1 = 2$ ist richtig!

Somit ist x = 7 die Lösung: $\mathbb{L} = \{7\}$

$$\sqrt{x+8} = x-4 \quad |\ ()^2$$

Beim Quadrieren wird, wie beschrieben, immer die komplette Seite quadriert:

$$x + 8 = (x - 4)^2$$

Hier muss die binomische Formel angewendet werden:

$$x + 8 = x^2 - 8x + 16 \quad |\ -x - 8$$

$$0 = x^2 - 9x + 8$$

Nun können wir die p-q-Formel anwenden:

$$x_{1/2} = 9/2 \pm \sqrt{81/4-8}$$
$$9/2 \pm 7/2$$

Also ist $x_1 = 8$ und $x_2 = 1$. Wir machen die Probe:

Für x = 8: $\sqrt{8+8}\overset{?}{=}8-4$

$$4 = 4$$

Somit ist x = 8 eine Lösung.

Für x = 1: $\sqrt{1+8}\overset{?}{=}1-4$

$$3 = -3$$

Somit ist x = 3 keine Lösung. Es gilt also: $\mathbb{L} = \{8\}$

Es gibt auch Wurzelgleichungen, bei denen man zunächst die Wurzeln nicht isolieren kann, wie beispielsweise:

$$\sqrt{x+4}-2=\sqrt{x-4}$$

In so einem Fall ist es das Beste, wenn beide Wurzeln (wie hier) auf verschiedenen Seiten stehen. Wir bestimmen die Lösung:

$$\sqrt{x+4}-2=\sqrt{x-4} \quad |\ ()^2$$

$$\left(\sqrt{x+4}-2\right)^2 = \left(\sqrt{x-4}\right)^2$$

(Achtung: Links binomische Formel anwenden.)

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{x+4} + 2^2 = x-4$$

$$x + 4 - 4\cdot\sqrt{x+4} + 4 = x - 4$$

$$x - 4\cdot\sqrt{x+4} + 8 = x - 4$$

Nun kann man die Wurzel isolieren:

$$x - 4\cdot\sqrt{x+4} + 8 = x - 4 \quad | -x -8$$

$$(*) \qquad -4\cdot\sqrt{x+4} = -12 \quad | :(-4)$$

$$\sqrt{x+4} = 3 \quad | ()^2$$

$$x + 4 = 9 \quad | -4$$

$$x = 5$$

Bemerkung:
Bei (*) hätte man nicht unbedingt durch (-4) teilen müssen, man hätte auch direkt quadrieren können und hätte $16(x+4) = 144$ erhalten, da für Produkte $(a\cdot b)^2 = a^2\cdot b^2$ gilt.

Nun machen wir noch die Probe:

$$\sqrt{5+4} - 2 \stackrel{?}{=} \sqrt{5-4}$$
$$3 - 2 = 1$$

Die Gleichung ist erfüllt und wir kennen die Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{5\}$

Aufgaben:
a) $\sqrt{2x+1} - 3 = 0$
b) $2\sqrt{x+4} - 1 = 5$
c) $\sqrt{3x+7} - 1 = 2x - 3$
d) $\sqrt{2x-1} + 2 = \sqrt{4x+5}$

Lösungen:
a) $\mathbb{L} = \{4\}$
b) $\mathbb{L} = \{5\}$
c) $\mathbb{L} = \{3\}$
d) $\mathbb{L} = \{1; 5\}$