Der Alternativtest

Hier sind zunächst die Hypothesen für einen Alternativtest bezüglich des Parameters p zu sehen:

H_0: $p = p_0$

gegen

H_1: $p = p_1$

Bei den Alternativtests (und Hypothesentests) können zwei mögliche Fehlentscheidungen getroffen werden. Man könnte H_0 verwerfen und H_1 annehmen, obwohl H_0 richtig ist. Diese Fehlentscheidung wird als Fehler 1. Art bezeichnet und die Wahrscheinlichkeit für diese Fehlentscheidung mit α.

Man könnte aber auch H_0 beibehalten, obwohl H_1 richtig ist. Diese Fehlentscheidung wird als Fehler 2. Art bezeichnet und die Wahrscheinlichkeit für diese Fehlentscheidung mit β.

Test 1 (mit $p_0 > p_1$):

H_0: $p = p_0$

gegen

H_1: $p = p_1$

H_0 wird verworfen, wenn k „zu klein“ ist, womit der kritische Bereich auf der linken Seite liegt. Bei gegebenem Signifikanzniveau (= Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art) α muss in der Tabelle mit den entsprechenden n und $p = p_0$ das größte k_o abgelesen werden, für welches

$P(X \leq k_o) \leq \alpha$

gilt. Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist dann $K = \{0, 1, \ldots, k_o\}$.

Beispiel 1:

Bei einem Glücksspiel wird behauptet, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% gewinnt. Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit nur 10 % beträgt. Also formuliert man die Hypothesen:

H_0: $p = 0{,}2$

gegen

H_1: $p = 0{,}1$

Das Spiel wird 100-mal gespielt, wobei man nur 14-mal gewinnt. Kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% ($\alpha = 0{,}05$) nachweisen, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit geringer als 20% ist (und z.B. 10% beträgt, wie in H_1 formuliert)?

$P(X \leq k_o) \leq 0{,}05$

Tabelle:
n = 100; p = 0,2

K	P(X ≤ k)
12	0,0253
13	0,0469
14	0,0804
15	0,1285
16	0,1923

Also ist $k_0 = 13$ und der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist $K = \{0, 1, \ldots, 13\}$. Da 14-mal gewonnen wurde und 14 nicht im kritischen Bereich liegt, kann H_0 nicht verworfen werden.

Nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art, also β:

Es gilt (der senkrechte Strich „|“ steht hier für „unter der Bedingung, dass“):

β = P(„H_0 wird nicht verworfen“ | H_0 ist falsch) = $P(X > 13 \mid p = 0{,}1) = 1 - P(X \leq 13 \mid p = 0{,}1)$

Also muss aus der Tabelle mit n = 100 und p = 0,1 der Wert für $P(X \leq 13)$ abgelesen werden.

Damit ergibt sich $\beta = 1 - 0{,}8761 = 0{,}1239 = 12{,}39\%$.

Wie man sieht, berechnet man den α-Fehler (Fehler 1. Art) mit dem p von H_0 (mit p_0) und den β-Fehler (Fehler 2. Art) mit dem p von H_1 (mit p_1).

Es gibt hier auch Aufgaben, bei denen man den α-Fehler berechnen muss. Hier ist der kritische Bereich gegeben. Wenn in der obigen Aufgabe steht, dass sich eine Person beschweren möchte, wenn sie höchstens 15-mal gewinnt, dann wäre α die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Person zu Unrecht beschwert. Diese würde hier

$\alpha = P(X \leq 15 \mid p = 0{,}2) = 0{,}1285$

betragen.

Test 2 (mit $p_1 > p_0$):

H_0: $p = p_0$

gegen

H_1: $p = p_1$

H_0 wird verworfen, wenn k „zu groß“ ist, womit der kritische Bereich auf der rechten Seite liegt. Bei gegebenem Signifikanzniveau α muss in der Tabelle mit den entsprechenden n und $p = p_0$ das kleinste k_u abgelesen werden, für welches

$P(X \geq k_u) \leq \alpha$

gilt, bzw.

$P(X \geq k_u) = 1 - P(X \leq k_u - 1) \leq \alpha$ oder $1 - \alpha \leq P(X \leq k_u - 1)$.

Dabei ist zu beachten, dass aus der Tabelle $k_u - 1$ abgelesen wird. Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist dann $K = \{k_u, \ldots, n\}$.

Beispiel 2:
Bei einem Medikament wird behauptet, dass eine bestimmte Nebenwirkung mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% auftritt. Man vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit größer ist, denn bei 50 Patienten, die das Medikament erhielten, hatten 11 diese Nebenwirkung. Man vermutet (H_1), die tatsächliche Wahrscheinlichkeit für eine Nebenwirkung betrage 20%.

Also formuliert man die Hypothesen:

H_0: $p = 0,1$

gegen

H_1: $p = 0,2$

Kann man auf einem Signifikanzniveau von 5% nachweisen, dass die Wahrscheinlichkeit für diese Nebenwirkung höher 10% ist?

$P(X \geq k_u) \leq 0,05$ bzw. $1 - 0,05 = 0,95 \leq P(X \leq k_u - 1)$

Wähle das kleinste k_u aus der Tabelle, für welches diese Bedingung gilt.

Tabelle:

n = 50; p = 0,1

K	$P(X \leq k)$
8	0,9421
9	0,9755
10	0,9906
11	0,9968
12	0,9990

Somit ist $k_u - 1 = 9$ bzw. $k_u = 10$.

Der kritische Bereich oder Ablehnungsbereich von H_0 ist $K = \{10, 11, \ldots, 50\}$.

Da diese Nebenwirkung 11-mal auftrat und 11 im kritischen Bereich liegt, kann H_0 verworfen werden.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art ist hier wieder die Wahrscheinlichkeit, dass man nicht im kritischen Bereich landet, obwohl das p von H_1 richtig ist (also wenn p = 0,2 wäre):

$\beta = P(X \leq 9 \mid p = 0{,}2) = 0{,}4437$

Tabellen zur Binomialverteilung können unter http://alles-mathe.de/Binomial-Tabelle/Binomialverteilung-Tab.html erstellt werden und Wahrscheinlichkeiten können auch unter http://www.online-datenanalyse.de/Verteilungen/Binomialverteilung.html direkt berechnet werden.