3 Erwartungswert und Varianz

Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsvariable X mit endlicher Ereignismenge $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ist wie folgt definiert:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

x_i sind die Werte, die die Zufallsvariable X als Realstreuung annehmen kann (da $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$). Statt E(X) wird auch das Symbol bzw. der griechische Buchstabe μ für den Erwartungswert verwendet.

Beispiel:
a) Zwei Personen vereinbaren ein Spiel. Es wird ein „fairer“ Würfel geworfen. Falls der Spieler, der den Würfel geworfen hat, eine 6 würfelt, erhält er von dem anderen Spieler 12€. Die Zufallsvariable X, die den Gewinn des Spielers der den Würfel wirft beschreibt, hätte folgende Verteilung

x_i	$P(X = x_i)$
12€	$\frac{1}{6}$
0€	$\frac{5}{6}$

Der Erwartungswert beträgt $E(X) = 12€ \cdot \frac{1}{6} + 0€ \cdot \frac{5}{6} = 2€$.

Wie man sieht, wird jeder der möglichen Werte mit der Wahrscheinlichkeit multipliziert, mit der der jeweilige Wert auftreten kann.

Der Erwartungswert beträgt also 2€, d.h. der würfelnde Spieler gewinnt im „mittel“ pro Spiel 2€. Soll das Spiel fair sein, dann muss er dem anderen Spieler pro Spiel einen Einsatz von 2€ bezahlen. Oben nutzen wir den Erwartungswert um den Bruttogewinn (ohne Berücksichtigung des Einsatzes) zu berechnen. Bei einem fairen Spiel muss somit der Erwartungswert des Bruttogewinns gleich dem Einsatz sein.

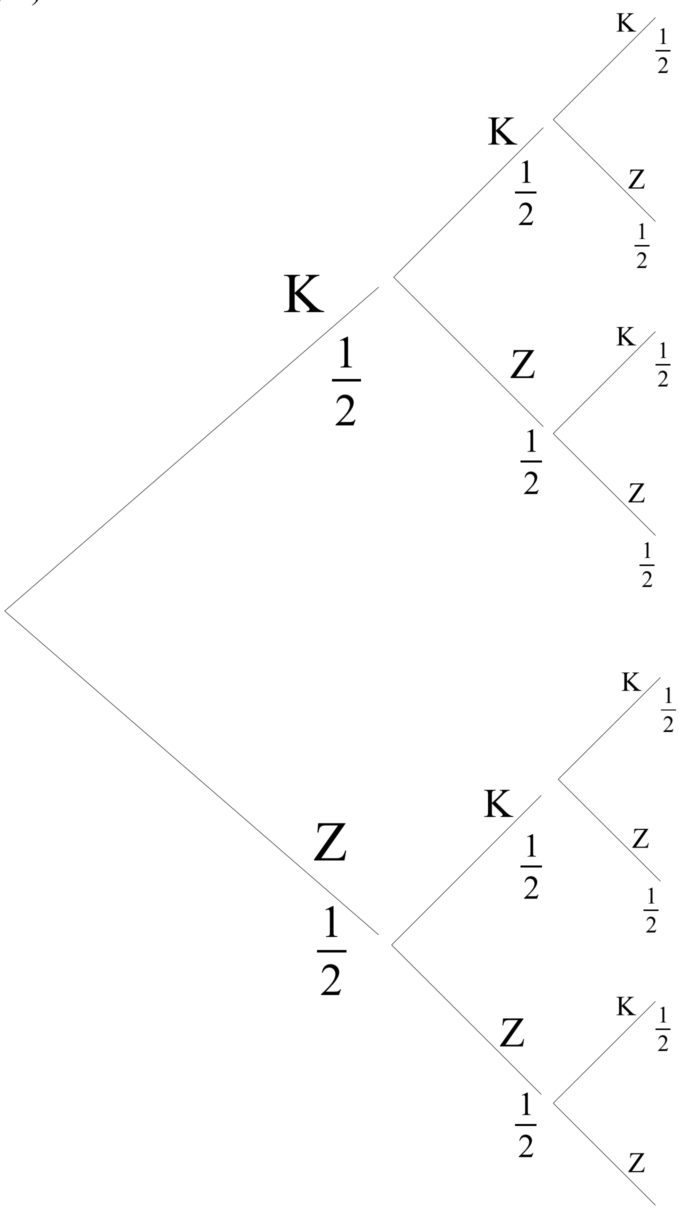
Der Erwartungswert des Nettogewinns (mit Berücksichtigung des Einsatzes) wäre bei einem fairen Spiel gleich Null:

$E(X_{\text{Netto}}) = (12€ - 2€) \cdot \frac{1}{6} + (-2€) \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{6}€ - \frac{10}{6}€ = \underline{0€}$

b) Es wird 3-mal eine faire Münze geworfen mit den Seiten Kopf (K) und Zahl (Z). Der Einsatz beträgt 4€. Für jeden Wurf, bei dem K oben liegt, erhält der Spieler 2€. Ist das Spiel fair?

Wir haben, wie bereits beschrieben, 2 Möglichkeiten. Wir können den Erwartungswert des Bruttogewinns mit dem Einsatz vergleichen, oder wir berechnen den Erwartungswert des Nettogewinns, der bei einem fairen Spiel 0(€) wäre.

Die Berechnung des Erwartungswertes des Bruttogewinns ist einfacher (als der des Nettogewinns). Wir bestimmen zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Gewinne. Man kann 0€ gewinnen (falls keine Seite K zeigt) oder im Idealfall 6€ (falls alle 3 Seiten K zeigen).



Es gilt:

$$P(X = 0€) = P(\{(Z, Z, Z)\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 2€) = P(\{(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)\}) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 4€) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 6€) = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Die Anzahl der Seiten, die K zeigen, ist (wie wir später sehen werden) binomialverteilt.

x_i	$P(X = x_i)$
0€	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
2€	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
4€	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$
6€	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$$E(X) = 0€ \cdot \frac{1}{8} + 2€ \cdot \frac{3}{8} + 4€ \cdot \frac{3}{8} + 6€ \cdot \frac{1}{8} = 3€ < 4€.$$

D.h. im „Mittel" verliert man 1€ pro Spiel. Der Erwartungswert des Nettogewinn wäre gleich -1€.

Die **Varianz** ist ein Maß der Streuung einer Zufallsvariable und ist (für $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$) wie folgt definiert:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot P(X = x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot P(X = x_n)$$

Als Symbol für die Varianz $V(X)$ wird auch σ^2 verwendet. Die Wurzel aus der Varianz $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ist die Standardabweichung.

Im **Beispiel**:

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)$
0€	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$0€ \cdot \frac{1}{8} = 0€$	$(0€ - 3€)^2$	$(0€ - 3€)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}€^2$
2€	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$	$2€ \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}€$	$(2€ - 3€)^2$	$(2€ - 3€)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}€^2$
4€	$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$	$4€ \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{2}€$	$(4€ - 3€)^2$	$(4€ - 3€)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}€^2$
6€	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$6€ \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}€$	$(6€ - 3€)^2$	$(6€ - 3€)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{8}€^2$
	Summe	$\mu = 3€$		$\sigma^2 = 3€^2$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{3€^2} \approx 1{,}73€$

Je größer die Varianz bzw. die Standardabweichung ist, umso schlechter eignet sich der Erwartungswert als ein Wert für eine Vorhersage bzw. umso mehr „streuen die Werte um den Erwartungswert".

Beispiel:

Es werden 2 faire Würfel gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Augensummer gleich 6 ist?

(b) die Augensumme höchstens gleich 4 ist?

(c) die Ausgensumme größer als 2 ist?

(d) Wie groß ist der Erwartungswert der Zufallsvariable S (der Summe der Augenzahlen)?

Für diese Aufgabe kann man zunächst mal eine Tabelle mit den Augensummen erstellen:

		Würfel 1					
		1	2	3	4	5	6
Würfel 2	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Für S = Augensumme gilt:

(a) $P(S = 6) = \frac{5}{36}$ $\quad (= P(\{(1;5), (2;4), (3;3), (4;2), (5,1)\}))$

(b) $P(S \leq 4) = \frac{1+2+3}{36} = \frac{1}{6}$

(c) $P(S > 2) = 1 - P(S \leq 2) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

(d) $E(S) = 2 \cdot P(S = 2) + \cdots + 12 \cdot P(S = 12)$

$$= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$

$$\underline{= 7}$$

Dieses Ergebnis ist plausibel, denn die Verteilung ist zu $s = 7$ symmetrisch ($P(S = 7 + x) = P(S = 7 - x)$).