1 Grundlagen

1.1 Grundbegriffe

Alle möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments fassen wir in einer Ereignismenge Ω zusammen. Ereignisse sind Teilmengen von Ω. Umfasst das Ereignis nun ein Element von Ω, dann handelt es sich um ein Elementarereignis.

Beispiel:
Bei einem Würfel mit sechs Seiten wäre $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ein mögliches Ereignis A ist, dass man eine gerade Zahl würfelt:

$$A=\{2, 4, 6\}$$

Ein Elementarereignis wäre $B=\{6\}$, also das Ereignis, dass eine 6 gewürfelt wird.

Laplace-Experiment:
Man geht davon aus, dass es nur endlich viele Elementarereignisse gibt: $|\Omega| = n$.

Jedes Elementarereignis E soll mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten $\Rightarrow P(E) = \frac{1}{n}$.

Somit gilt für ein Ereignis A: $P(A) = \frac{|A|}{n}$.

Beispiel „fairer“ Würfel:

Hier gibt es 6 mögliche Elementarereignisse, wobei jedes (deshalb „fairer Würfel“) mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt. Beispielsweise gilt dann:

$$P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Es gilt folgendes Gesetz für zwei Ereignisse A und B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Beispiel:
In einer Urne sind 20 Kugeln mit den Ziffern von 1, 2, …, 20 beschriftet. Es wird zufällig eine Kugel gezogen.

Wir betrachten folgende Ereignisse:

A: Es wird eine Kugel mit einer Ziffer gezogen, die durch 9 teilbar ist.
B: Es wird eine Kugel mit einer Ziffer gezogen, die durch 6 teilbar ist.

A= {9, 18}

B= {6, 12, 18}

A∩B= {18}

$$P(A\cup B) = \frac{|A|}{20} + \frac{|B|}{20} - \frac{|A\cap B|}{20} = \frac{2}{20} + \frac{3}{20} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Das ist das gleiche wie P(A∪B)=P({6, 9, 12, 18})

Weiterhin gilt: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Beispiel:
A sei das Ereignis, dass keine 6 geworfen wird: A = {1, 2, 3, 4, 5}

Damit ergibt sich das Komplement von A (dies sind alle Elemente von Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, die nicht in A liegen): $\overline{A} = \{6\}$

Somit gilt:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Bemerkung:
Diese Formel wir bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung später oft verwendet. Man kann sie auch einsetzen, wenn die Berechnung der Wahrscheinlichkeit für $P(A)$ aufwändig wäre und man $P(\overline{A})$ einfach berechnen kann.

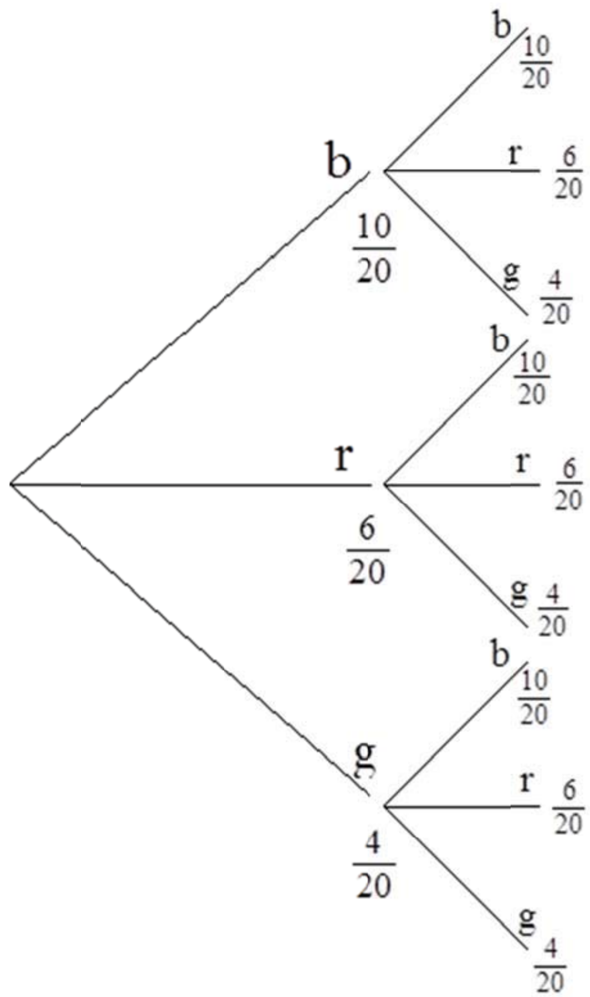
1.2 Wahrscheinlichkeitsbaum

Eine Urne enthält 10 blaue (b), 6 rote (r) und 4 gelbe (g) Kugeln. Es wird 2-mal mit Zurücklegen eine Kugel gezogen.

Hier sind folgende Elementarereignisse denkbar: {(b, b), (b, r), (b, g), (r, b), (r, r), (r, g), (g, b), (g, r), (g, g)}

Dies sind $3^2 = 9$ Elementarereignisse. Würde man dreimal ziehen, so ergäben sich $3^3 = 27$ Elementarereignisse.

Man kann dieses Zufallsexperiment mit einem Baum darstellen (wie allgemein bei Experimenten, die wiederholt ausgeführt werden).



Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln blau sind, ergibt sich durch

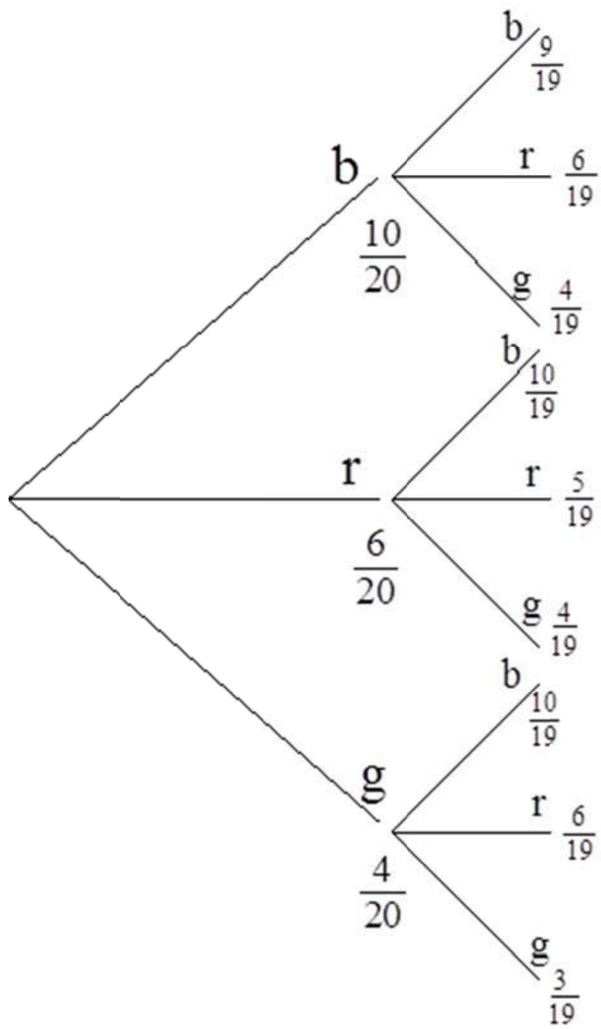
P({(b, b)})= $\frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel (d.h. genau eine) blau ist wäre:

P({(b, r)})+ P({(b, g)})+ P({(r, b)})+ P({(g, b)})= $\frac{10}{20}\cdot\frac{6}{20}+\frac{10}{20}\cdot\frac{4}{20}+\frac{6}{20}\cdot\frac{10}{20}+\frac{4}{20}\cdot\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

Wie sieht es aus, wenn ohne Zurücklegen gezogen wird?

Hier würde sich nach jedem Zug die Wahrscheinlichkeiten ändern, da die jeweils gezogene Kugel fehlt. Wir zeichnen für diesen Fall einen Baum mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.



Hier wäre beispielsweise

P({(b, b)}) = $\frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19}=\frac{9}{38}$.

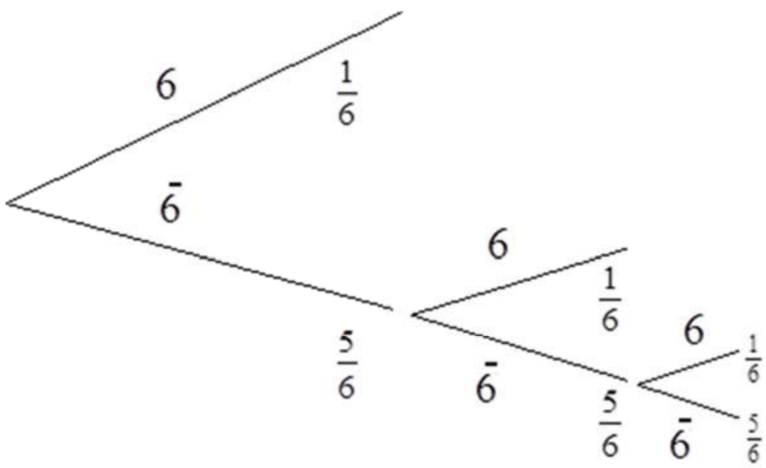
Ein weiteres **Beispiel** für die Verwendung eines Baumes:
Es wird 3−mal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dabei mindestens eine 6 zu würfeln (Ereignis A)?

1. Möglichkeit:

Die Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213 = 42{,}13\%$$

Sobald im Baumdiagramm eine 6 vorkommt, kann der Ast beendet werden (das wäre das selbe, wie bei einem Spiel, bei dem ein Spieler 3 mal würfelt und gewinnt, sobald die erste 6 fällt). Wenn man die Verästlung fortsetzen würde, so müsste man über alle diese Äste summieren und es würde sich letztendlich nur derselbe Wert ergeben. Denn wenn man 100-mal würfelt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, beim ersten Wurf eine 6 zu erhalten 1/6 (wenn es egal wäre, was danach gewürfelt wird).



2. Möglichkeit:

$$\mathrm{P(A)} = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}4213 = 42{,}13\%$$

Das Komplementärereignis $\overline{\mathrm{A}}$ ist das Ereignis, dass keine 6 gewürfelt wurde.