Aufgaben zur Binomialverteilung

1) In einer Urne sind 8 rote und 12 blaue Kugeln.

I) Es wird 50-mal mit Zurücklegen gezogen.

a) Wie viele rote Kugeln sind zu erwarten?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 20 rote Kugeln gezogen werden?

c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 10 rote Kugeln gezogen werden?

d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10 rote Kugeln gezogen werden.

II) Wie oft muss man mindestens ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens eine rote Kugel zu zieht?

2) Die Wahrscheinlichkeit im Ort Ampelberg auf eine grüne Ampel zu treffen beträgt 30%. Jemand fährt durch dieses Ort und kommt bei 10 Ampeln vorbei.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 5 Ampeln grün sind?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 3 Ampeln grün sind?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Ampel grün ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 2 Ampeln grün sind und die restlichen rot?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 Ampeln grün sind?

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 bis 5 Ampeln grün sind?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als eine Ampel grün ist?

h) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die unter den ersten 5 Ampeln genau 2 grün sind und dann alle restlichen Ampeln rot sind?

Lösungen:

1) Hier ist die Tabelle, die man zum Lösen der Aufgabe 1 benötigt (n = 50, p = 0,4):

k	P(X = k)	P(X ≤ k)
8	0.000169	0.000231
9	0.000527	0.000757
10	0.00144	0.002197
11	0.003491	0.005688
12	0.007563	0.013251
13	0.014738	0.027988
14	0.025967	0.053955
15	0.041547	0.095502
16	0.060589	0.156091
17	0.080785	0.236876
18	0.098737	0.335613
19	0.110863	0.446476
20	0.114559	0.561035
21	0.109103	0.670138
22	0.095879	0.766017
23	0.077815	0.843832
24	0.058361	0.902193
25	0.040464	0.942656
26	0.025938	0.968594
27	0.015371	0.983965
28	0.008417	0.992383
29	0.004257	0.99664
30	0.001987	0.998626
31	0.000854	0.999481
32	0.000338	0.999819
33	0.000123	0.999942

I) $n = 50,\ p = 8/20 = 0{,}4.$

a) $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}4 = 20$

b) $P(X = 20) = \binom{50}{20} \cdot 0{,}4^{20}\,(1 - 0{,}4)^{50-20} = \binom{50}{20} \cdot 0{,}4^{20} \cdot 0{,}6^{30} \approx 0{,}1146 \triangleq 11{,}46\%$

c) $P(X \leq 10) \approx 0{,}0022 \triangleq 0{,}22\%$ (aus Tabelle oder über $\sum_{k=0}^{10} \binom{50}{k} \cdot 0{,}4^{k} \cdot 0{,}6^{50-k}$)

d) $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) \approx 1 - 0{,}000757 \approx 0{,}9992 \triangleq 99{,}92\%$

(mit Tabelle oder man kann auch direkt $\sum_{k=10}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}4^{k} \cdot 0{,}6^{50-k}$ berechnen, falls dies der Taschenrechner kann)

II) $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$

$1 - P(X \leq 0) \geq 0{,}99$

$1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \quad | + P(X = 0) - 0{,}99$

$0{,}01 \geq P(X = 0) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}4^{0} \cdot 0{,}6^{n-0}$

$0{,}01 \geq 0{,}6^{n}$ | lg( )

$\lg(0{,}01) \geq n \cdot \lg(0{,}6)$ | : lg(0,6)

$\lg(0{,}01)/\lg(0{,}6) \leq n$ (hier hat sich das Zeichen „≥“ umgedreht, da lg(0,6) negativ ist)

Also ab n = 10, denn $\lg(0{,}01)/\lg(0{,}6) \approx 9{,}02$.

2) Hier ist die Tabelle, die man zum Lösen dieser Aufgabe benötigt (n = 10, p = 0,3):

k	P(X = k)	P(X ≤ k)
0	0.028248	0.028248
1	0.121061	0.149308
2	0.233474	0.382783
3	0.266828	0.649611
4	0.200121	0.849732
5	0.102919	0.952651
6	0.036757	0.989408
7	0.009002	0.99841
8	0.001447	0.999856
9	0.000138	0.999994
10	0,000006	1

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}1029 \triangleq 10{,}29\%$ (kann man auch der Tabelle entnehmen)

b) $P(X \leq 3) \approx 0{,}6496 \triangleq 64{,}96\%$ (aus Tabelle oder über $\sum_{k=0}^{3} \binom{10}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{10-k}$)

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$= 1 - 0{,}7^{10} \approx 1 - 0{,}028248 \approx 0{,}9718 \triangleq 97{,}18\%$

d) $0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8 \approx 0{,}0052 \triangleq 0{,}52\%$

Hier ohne den Faktor $\binom{10}{2}$, da die Reihenfolge fest ist („die ersten 2 Ampeln“). Bei der Binomialverteilung ist die Reihenfolge egal, hier würde man die Wahrscheinlichkeit erhalten (über $\binom{10}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8$), dass genau 2 grün Ampeln sind, egal welche.

e) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}382783 \approx 0{,}6172 \triangleq 61{,}72\%$

(oder $\sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{10-k}$)

f) $P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) \approx 0{,}952651 - 0{,}149308 \approx 0{,}8033 \triangleq 80{,}33\%$

Denn: {2, 3, 4, 5} ist {0, 1, 2, 3, 4, 5} ohne {0, 1}.

(oder $\sum_{k=2}^{5} \binom{10}{k} \cdot 0{,}3^k \cdot 0{,}7^{10-k}$)

g) $P(X > 1) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 1 - 0{,}149308 \approx 0{,}8507 \triangleq 85{,}07\%$

h) Unter 5 Ampeln sollen 2 grün sein: P(„unter 5 Ampeln sind 2 grün“) = $\binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3$

5 Ampeln sollen rot sein: P(„unter 5 Ampeln sind 5 Ampeln rot“) = $0{,}7^5$

Bei den obigen Berechnungen ist es so, dass jeweils n = 5 vorliegen. Nun können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen:

P(„unter den ersten 5 Ampeln sind 2 grün und die restlichen sind rot“) =

P(„unter 5 Ampeln sind 2 grün“) · P(„unter 5 Ampeln sind 5 Ampeln rot“) = $\binom{5}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}7^5$

$\approx 0{,}0519 \mathrel{\widehat{=}} 5{,}19\%$