Ebenenscharen

1) $E_a : 2a \cdot x + a \cdot y - 3a \cdot z = 4 \qquad (a \neq 0)$

a) Wie muss a gewählt werden, damit der Punkt P (1| 2| 0) in E liegt?

b) Wie ist die Lage der Ebenen der Schar mit verschiedenen a zueinander zu beurteilen?

Lösung:

a) P (1|2|0) einsetzen: $2a \cdot 1 + a \cdot 2 - 3a \cdot 0 = 4$

$$4a = 4 \mid :4$$

$$a = 1$$

b) Die Ebenen E_a der Schar haben den Normalenvektor:

$$\overrightarrow{n_a} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ -3a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Sie sind also alle parallel, da die Normalenvektoren alle Vielfache zueinander sind. Da die rechte Seite unabhängig von a ist und ≠ 0, sind sie alle „echt" (d.h. nicht identisch) parallel (für verschiedene a).

2) $E_a : a \cdot x - a \cdot y + z = 4$

Welcher Punkt liegt unabhängig von a in gleicher Ebene der Schar?

Lösung:

P (0| 0| 4), denn dieser Punkt erfüllt immer die Gleichung (für beliebige $a \neq 0$).

3) $E_r: 4r \cdot x - 2r \cdot y + r \cdot z = 8r \qquad r \neq 0.$

a) Wie lauten die Spurpunkte der Ebenenschar?

b) Zeigen Sie, dass der Punkt P (2| 4| 8) in allen Ebenen der Schar liegt.

c) Zeigen Sie, dass Q(0| 0| 4) in keiner Ebene der Schar liegt.

Lösung:

a) Schnittpunkt mit x-Achse: y = 0 und z = 0 in E_r: $4rx = 8r \mid :(4r)$

$$x = 2$$

$\Rightarrow S_x(2|\ 0|\ 0)$

Schnittpunkt mit y-Achse: x = 0 und z = 0 in E_r: $-2ry = 8r \mid :(-2r)$

$$y = -4$$

$\Rightarrow S_y\ (0|\ -4|\ 0)$

Schnittpunkt mit z-Achse: $x = 0$ und $y = 0$ in E_r: $rz = 8r \mid :r$

$$z = 8$$

$\Rightarrow S_z\,(0|\,0|\,8)$

Alle Spurpunkte sind unabhängig von r. Man hätte auch die Achsenabschnittsform bestimmen können ($4rx - 2ry + rz = 8r$ durch $8r$ dividieren, da r ungleich Null ist, womit man $x/2 + y/(-4) + z/8 = 1$ erhält, wo man die Spurpunkte ablesen kann).

b) P(2/4/8) in E_r einsetzen: $4r \cdot 2 - 2r \cdot 4 + 8r = 8r \Leftrightarrow 8r = 8r$ (ist für alle r erfüllt).

c) Wir setzen $Q(0|\,0|\,4)$ in E_r ein:

$$4r \cdot 0 - 2r \cdot 0 + 4r = 8r$$

$$4r = 8r \mid -4r$$

$$0 = 4r \mid :4$$

$r = 0$ ist nicht möglich, denn es wäre keine Ebene (E_0: $0 = 0$)

und ist deshalb auch $r = 0$ nicht zugelassen ($r \neq 0$).

4) Wie muss r gewählt werden, damit E_r: $2r\cdot x + r\cdot y - z = 4$ parallel zur Geraden

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ verläuft.

Lösung:

<u>Möglichkeit 1:</u> Der Normalenvektor von E_r muss senkrecht zum Richtungsvektor von g sein:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2r\\r\\-1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2r - r - 1 = 0$$

$$r - 1 = 0 \mid +1$$

$$r = 1$$

Für $r = 1$ liegt der Stützpunkt von g, d.h. $(1|\,2|\,2)$, nicht in E_r, denn:

E_1: $2x + y - z = 4$

$(1|\,2|\,2)$ in E_1 einsetzen: $2 \cdot 1 + 2 - 2 = 4$

$$2 = 4$$

Damit ist g für $r = 1$ parallel zu E_1, liegt aber nicht in der Ebene E_1 (für z.B. $4 = 4$ wäre g in E_1).

Möglichkeit 2: Die Gerade

$x = 1 + t$
$y = 2 - t$
$z = 2 + t$

in E_r einsetzen:

$2r \cdot (1 + t) + r \cdot (2 - t) - (2 + t) = 4$

$2r + 2rt + 2r - rt - 2 - t = 4$

$4r + rt - t - 2 = 4 \quad | -4r + 2$

$rt - t = 6 - 4r$

$(r - 1) \cdot t = 6 - 4r$

Für $r = 1$ würde t aus der Gleichung fallen und E_r wäre parallel zu g, da in diesem Fall auf der rechten Seite $6 - 4 = 2$ steht (und links 0).